Vorlesung vom 19.03.2012

2.4 Diagonalisierbarkeit

Zur Erinnerung Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K, und sei $p(t)$ das charakteristische Polynom von f.

Für einen Eigenwert $\alpha \in K$ von f definiert man

- die **algebraische Vielfachheit** von α

$$\mu(p(t), \alpha) = max\{n \in N : p(t) = (t-\alpha)^n g(t) \text{ mit } g(t) \in K(t)\} \tag{2.250}$$

- den **Eigenraum** von f bezüglich α:

$$Eig(f;\alpha) = \{v \in V : f(v) = \alpha v\} \tag{2.251}$$

- die **geometrische Vielfachheit** von α

$$dim(Eig(f;\alpha)) \tag{2.252}$$

Man definiert auch für $A \in Mat(n,K)$ und einen Eigenwert α von A:

$$Eig(A;\alpha) = Eig(h_A, \alpha) \tag{2.253}$$

Bemerkung (Korollar 2.4.4)
Wenn f $dim\,V$ Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit 1 hat, dann ist f diagonalisierbar.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(4;\mathbb{R}) \tag{2.254}$$

$$\begin{aligned}
p_A(t) &= \begin{vmatrix} t-5 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} && (2.255)\\
&= ((t-5)(t-1) - (-2)(2))(t-2)^2 && (2.256)\\
&= (t^2 - 6t + 9)(t-2)^2 && (2.257)\\
&= (t-3)^2(t-2)^2 && (2.258)\\
&\mu(p_A(t);3) = 2 && (2.259)\\
&\mu(p_A(t);2) = 2 && (2.260)
\end{aligned}$$

- Eigenwert 2

$$(2E - A)x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \tag{2.261}$$

$$Eig(A;2) = Span\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\} \tag{2.262}$$

$$dim(Eig(A;2)) = 2 \tag{2.263}$$

- Eigenwert 3

$$(3E - A)x = 0 \tag{2.264}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\-2 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2, x_3 = x_4 = 0 \tag{2.265}$$

$$Eig(A;3) = Span\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\} \tag{2.266}$$

$$dim(Eig(A;3)) = 1 \tag{2.267}$$

Man hat 'nicht genug' linear unabhängige Eigenvektoren[4], um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu bilden, A ist **nicht** diagonalisierbar.

Beachte auch, dass

$$Eig(A;3) \cap Eig(A;2) = \{0\} \tag{2.268}$$

$$\underbrace{Eig(A;3) \oplus Eig(A;2)}_{dim3} \neq \mathbb{R}^4 \tag{2.269}$$

Zur Erinnerung Sei V ein Vektorraum über K mit Unterräumen $W_1, ..., W_K$. Wenn für

$$w_1 \in W_1, ..., w_k \in W_K \tag{2.270}$$

$$w_1 + ... + w_k = 0 \rightarrow w_1 = ... = w_k = 0 \tag{2.271}$$

$$\tag{2.272}$$

dann heisst $W_1 + ... + W_K$ die **direkte Summe** von $W_1, ...W_K$, geschrieben:

$$W_+ \oplus ... \oplus W_K \tag{2.273}$$

Äquivalente Formulierung[5]:

$$W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_K) = \{0\} \text{ für } i = 1...k \tag{2.274}$$

[4] diagonalisierbar = Wir haben eine Basis von Eigenvektoren.
[5] Lineare Algebra 1: Satz 4.3.2

Bemerkung

$$dim(W_1 \oplus ... \oplus W_K) = dim(W_1) + ... + dim(W_K) \tag{2.275}$$

Satz 2.4.6 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K mit charakteristischem Polynom $p(t)$ und paarweise verschiedenen Eigenwerten $\alpha_1, ..., \alpha_k \in K$. Dann sind äquivalent:*

(2) $p(t)$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h.

$$p(t) = (t - \alpha_1)^{r_1} ... (t - \alpha_k)^{r_k} \tag{2.276}$$

und $dim(Eig(f; \alpha_i)) = r_i = \mu(p(t); \alpha_i)$ für $i = 1...k$.

(3) $V = Eig(f; \alpha_1) \oplus ... \oplus Eig(f; \alpha_k)$

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2) Wenn f diagonalisierbar ist, gibt es eine Basis von Eigenvektoren von f.

$$(v_{1,1}, ..., v_{1,s_1}, v_{2,1}, ..., v_{2,s_2}, ..., v_{k,1}, ..., v_{k,s_k}) \tag{2.277}$$
$$\text{mit } v_{1,1}, ..., v_{i,s_i} \in Eig(f; \alpha_i) \text{ für } \alpha = 1...k \tag{2.278}$$

Setzen wir

$$r_i = \mu(p(t); \alpha_i) \tag{2.279}$$

so gilt für $i = 1...k$

$$s_i \leq dim(Eig(f; \alpha_i)) \leq r_i \tag{2.280}$$

und

$$r_1 + ... + r_k \leq dim\, V \tag{2.281}$$
$$= s_1 + ... + s_k \tag{2.282}$$
$$\leq r_1 + ...r_k \tag{2.283}$$
$$\Rightarrow p(t) = (t - \alpha_i)^{r_1} ... (t - \alpha_k)^{r_k} \tag{2.284}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3) Sei

$$W = Eig(f; \alpha_1) + ...1 Eig(f; \alpha_k) \tag{2.285}$$

Nach Satz 2.4.3 sind $w_1, ..., w_k$ (alle $\neq 0$) für $w_i \in Eig(f; \alpha_i)$ **linear unabhängig**. Aber dann gilt für $w_i \in Eig(f; \alpha_i)$

$$w_1 + ... + w_k = 0 \Rightarrow w_1 = ... = w_k = 0 \tag{2.286}$$
$$\Rightarrow W = Eig(f; \alpha_1) \oplus ... \oplus Eig(f; \alpha_k) \tag{2.287}$$

Aber auch

$$
\begin{aligned}
dim\,W &= (dim(Eig(f;\alpha_1)) + ... + dim(Eig(f;\alpha_k))) && (2.288)\\
&= \mu(p(t);\alpha_1) + ... + \mu(p(t);\alpha_k) \text{ (nach (2))} && (2.289)\\
&= dim\,V && (2.290)
\end{aligned}
$$

- (3) $\Rightarrow$ (1) Sei

$$B_i = (v_{i,1}, ..., v_{i,s_i}) \tag{2.291}$$

eine Basis von $Eig(f;\alpha_i)$ für $i = 1...k$. Also ist

$$(v_{1,1}, ..., v_{1,s_1}, ..., v_{k,1}, ...v_{k,s_k}) \tag{2.292}$$

eine Basis von V die aus Eigenvektoren von f besteht, d.h. f ist diagonalisierbar. □

Man erhält ein **Verfahren** für die Diagonalisierung eines Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K:

(1) Mit Hilfe einer Basis B von V und der Matrix $A = \mathcal{M}_B(f)$ berechnet man das charakteristische Polynom $p(t)$.

(2) Man sucht eine Zerlegung von $p(t)$ in Linearfaktoren.

(3) Für jeden Eigenwert α von f bestimmt man durch Lösung eines linearen Gleichungssystems eine Basis von $Eig(f;\alpha)$. Dann kann man überprüfen, ob

$$dim(Eig(f;\alpha)) = \mu(p(t);\alpha) \tag{2.293}$$

gilt. Genau dann, wenn dies für alle Eigenwerte α der Fall ist, ist f **diagonalisierbar** und man kann eine Basis von Eigenvektoren bilden.

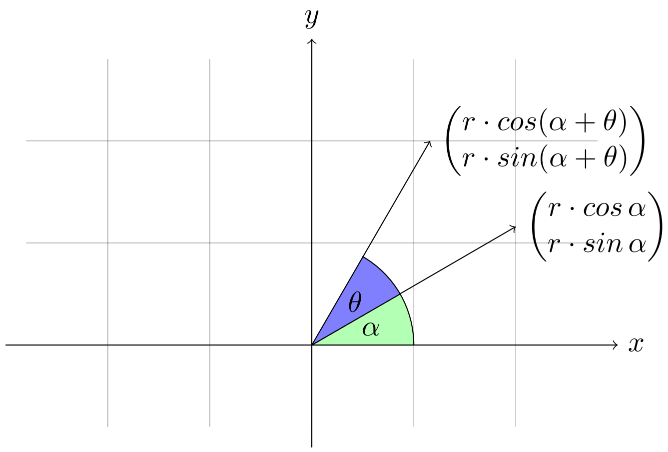
3 Orthogonale Matrizen und Drehungen

3.1 Die Orthogonale Gruppe

Wir haben schon gesehen, dass

$$\begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \in Mat(2;\mathbb{R}), \theta \in [0, 2\pi) \tag{3.1}$$

die Matrixdarstellung einer Drehung von $\mathbb{R}^2$ um den Winkel θ bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2) ist.



Man sieht auch, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sin\,\theta \\ 0 & sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

die Matrixdarstellung einer räumlichen Drehung um den Winkel θ um den Vektor

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

bezüglich der Standardbasis ist.

Frage Wie beschreibt man **alle** diese 'Drehmatrizen'?

$$A \in Mat(n; \mathbb{R}) \tag{3.4}$$

heisst **orthogonal**, wenn

$$A^t = A^{-1}, \text{ d.h. } A^t A = E \tag{3.5}$$

Beachte, dass

$$\begin{aligned} A^t A = E, B^t B = E \Rightarrow (AB)^t (AB) & \qquad (3.6)\\ = B^t A^t AB & \qquad (3.7)\\ = B^t EB & \qquad (3.8)\\ = E & \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Also bilden die orthogonalen $n \times n$ Matrizen eine **Untergruppe** von $GL(n; \mathbb{R})$,

$$O(n; \mathbb{R}) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}) : A^t A = E\} \tag{3.10}$$

die sogenannte **orthogonale Gruppe**. Beachte nun, dass

$$\begin{aligned} A \in O(n; \mathbb{R}) &\Rightarrow det(A^t A) = detE & (3.11)\\ &\Rightarrow (det\, A)(det\, A^t) = 1 & (3.12)\\ &\Rightarrow (det\, A)^2 = 1 & (3.13)\\ &\Rightarrow det\, A = 1 \text{ oder } det\, A = -1 & (3.14) \end{aligned}$$

Auch

$$det\, A = 1, det\, B = 1 \Rightarrow det(AB) = 1 \tag{3.15}$$

Man definert die Untergruppe von $O(n; \mathbb{R})$

$$SO(n; \mathbb{R}) = \{A \in O(n; \mathbb{R}) : det\, A = 1\} \tag{3.16}$$

die **spezielle orthogonale Gruppe**. Zudem gilt

$$Mat(n; \mathbb{R}) \subseteq GL(n; \mathbb{R}) \subseteq O(n; \mathbb{R}) \subseteq SO(n; \mathbb{R}) \tag{3.17}$$

Behauptung Eine Matrix A beschreibt eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ gdw $A \in SO(2; \mathbb{R})$ oder $A \in SO(3; \mathbb{R})$.

Das **Skalarprodukt** von Spaltenvektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist wie folgt definiert:

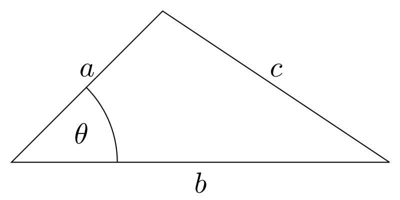
$$\begin{aligned} (x \cdot y) &= x^t y & (3.18)\\ &= x_1 y_1 + ... + x_n y_n & (3.19) \end{aligned}$$

Die Länge $|x|$ von $x \in \mathbb{R}^n$ ist fixiert durch

$$|x|^2 = (x \cdot x) \tag{3.20}$$
$$= x_1^2 + ... + x_n^2 \tag{3.21}$$

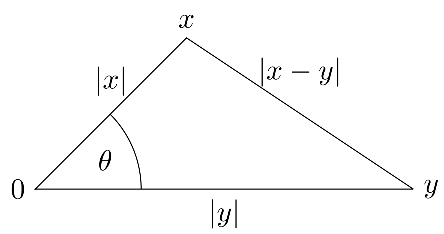
Ein Vektor mit Länge 1 heisst **Einheitsvektor**.

Für ein Dreieck in $\mathbb{R}^n$ der Form



gilt der Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\theta \tag{3.22}$$



Man erhält

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|cos\,\theta \tag{3.23}$$
$$\Rightarrow (x-y)\cdot(x-y) = (x\cdot x) + (y\cdot y) - 2(x\cdot y) \tag{3.24}$$
$$= (x\cdot x) + (y\cdot y) - 2|x||y|cos\,\theta \tag{3.25}$$
$$\Rightarrow (x-y) = |x||y|cos\,\theta \tag{3.26}$$

Beachte, dass

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (x\cdot y) = 0 \tag{3.27}$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ heissen (zueineander) **orthogonale** Vektoren, wenn

$$(x \cdot y) = 0 \tag{3.28}$$

Satz 3.1.1 *Sei $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ Dann sind äquivalent:*

(1) A ist orthogonal

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : (Ax \cdot Ay) = (x \cdot y)$

(3) Die Spalten von A sind paarweise orthogonale Einheitsvektoren.

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{aligned} A^tA = E \Rightarrow (x \cdot y) &= x^ty && (3.29)\\ &= x^tA^tAy && (3.30)\\ &= (Ax)^tAy && (3.31)\\ &= (Ax \cdot Ay) && (3.32) \end{aligned}$$

- (2) $\Rightarrow$ (1) Nehmen wir an, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x^ty = x^tA^tAy \tag{3.33}$$

Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x^tBy = 0 \text{ mit } B = E - A^tA \tag{3.34}$$

Insbesondere gilt für $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$e_i^tBe_j = b_{ij} = 0 \tag{3.35}$$

Also $B = 0$ und $A^tA = E$

- (2) $\Leftrightarrow$ (3) Sei $A = (a_1, ..., a_n)$ und beachte, dass der Eintrag der Matrix A^tA an der Stelle (i, j) $(a_i \cdot a_j)$ ist. Deshalb:

$$\begin{aligned} A^tA = E \text{ gdw} \quad & (i)\,(a_i \cdot a_i) = 1 \text{ für } i = 1...n && (3.36)\\ & (ii)\,(a_i \cdot a_j) = 0 \text{ für } i \neq j && (3.37)\\ \text{gdw} \quad & (i)\,a_i \text{ ist ein Einheitsvektor } i = 1...n && (3.38)\\ & (ii)\,a_i, a_j (i \neq j) \text{ sind orthogonal} && (3.39) \end{aligned}$$

$\square$