Lineare Algebra II

Frühjahrssemester 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorräume und Basen

Themen

- Wiederholung der Hauptideen
- Geordnete Mengen und das Zornsche Lemma
- **Satz:** Jeder Vektorraum hat eine Basis

1.1 Definitionen, Eigenschaften, Beispiele

Zur Erinnerung... Ein **Vektorraum** V über einem Körper K ist eine Menge zusammen mit zwei Verknüpfungen:

- $+$: $V \times V \to V$ (Addition)
- $\cdot$: $K \times V \to V$ (skalare Multiplikation)

wobei

- V mit $+$ ist eine abelsche Gruppe
- für $\alpha, \beta \in K$ und $v, w \in V$:

$$(\alpha +_K \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \tag{1.1}$$
$$\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w \tag{1.2}$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \tag{1.3}$$
$$1 \cdot v = v \tag{1.4}$$

Beispiele

(i) Der Standardraum K^n über K besteht aus der Menge aller Spaltenvektoren

$$K^n = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \} \tag{1.5}$$

mit komponentenweisen Addition und skalarer Multiplikation.

(ii) $Mat(m, n; K)$ mit Matrixaddition und skalarer Multiplikation.

(iii) $Alt(n;K)$, die Menge aller $n \times n$-Matrizen A über K mit $A^t = -A$ (schiefsymmetrische Matrizen) ist ein Unterraum von $Mat(n;K)$.

$$0 \in Alt(n;K) \tag{1.6}$$
$$A^t = -A, B^t = -B \tag{1.7}$$
$$\Rightarrow (\lambda A)^t = \lambda A^t = -(\lambda A) \tag{1.8}$$
$$\Rightarrow (A+B)^t = A^t + B^t \tag{1.9}$$
$$= -A - B = -(A+B) \tag{1.10}$$

(iv) $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$; auch $Mat(m,n;\mathbb{C})$ (als eine Menge) über $\mathbb{R}$.

(v) $Abb(M,K)$ die Menge aller Abbildungen von $M \neq \emptyset$ nach K mit Verknüpfungen definiert durch:

$$(\phi + \chi)(x) = \phi(x) + \chi(x) \tag{1.11}$$
$$(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x) \tag{1.12}$$

ist ein Vektorraum über K.

(vi) $Abb(\mathbb{R},\mathbb{R})$ hat Unterräume:
- $Pol\,\mathbb{R} := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n : \alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$
- $C(\mathbb{R}) := \{\phi \in Abb(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \phi \text{ ist stetig}\}$

(vii) $Abb(\mathbb{N},\mathbb{R})$, der Vektorraum aller reellen Folgen $\mathcal{F}$, hat Unterräume:
- $\mathcal{F}_b := \{a \in \mathcal{F} : a \text{ ist beschränkt}\}$
- $\mathcal{F}_k := \{a \in \mathcal{F} : a \text{ ist konvergent}\}$

Zur Erinnerung... Sei E eine Teilmenge eines Vektorraums V über K.

- E heisst **Erzeugendensystem** von V, wenn

$$V = Span\,E \tag{1.13}$$
$$(Span\,\emptyset = \{0\}) \tag{1.14}$$

  V heisst **endlich erzeugt**, wenn es ein endliches Erzeugendensystem von V gibt.

- E heisst **linear unabhängig** (andernfalls linear abhängig), wenn für alle n verschiedenen Elemente $v_1, ..., v_n$ von V gilt:

$$\alpha_1 v_1 + ...\alpha_n v_n = 0 \tag{1.15}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0 \tag{1.16}$$
$$(\alpha_1, ..., \alpha_n \in K) \tag{1.17}$$

- E heisst eine **Basis** von V, wenn E ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Sei nun V ein **endlich erzeugter** Vektorraum über K:

- Falls V ein Erzeugendensystem von n Elementen hat, dann sind je $n+1$ Elemente von V linear abhängig[1].
- Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann zu einer (endlichen) Basis ergänzt werden.

Idee Seien $v_1, ..., v_n$ verschiedene linear unabhängige Elemente von V. Ist $\{v_1, ..., v_n\}$ kein Erzeugendensystem, dann gibt es

$$v_{n+1} \in V \setminus Span\{v_1, ..., v_n\} \tag{1.18}$$

wobei $\{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig ist.

Daraus folgt, dass V eine endliche Basis hat und je zwei Basen von V gleich viele Elemente haben: die **Dimension**, $dim\, V$, von V[2].

Beispiele

(i) Die **Standardbasis** von K^n ist $\{e_1, ..., e_n\}$ mit

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow 1 \text{ in der } i\text{-ten Zeile} \tag{1.19}$$

und $dim\, K^n = n$

(ii) Die Standardbasis von $Mat(m, n; K)$ ist

$$\{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \tag{1.20}$$

mit $E_{ij} = (e_{kl})$ wobei

$$e_{kl} = \begin{cases} 1 & k = i, l = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{1.21}$$

$dim\, Mat(m, n; K) = mn$

[1] Lemma 3.3.2, lineare Algebra I
[2] Satz 3.4.2, lineare Algebra I

(iii)

$$Alt(3;\mathbb{R}) = \{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \tag{1.22}$$

Man beachte, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \alpha(E_{12} - E_{21}) + \beta(E_{13} - E_{31}) + \gamma(E_{23} - E_{32}) \tag{1.23}$$

und

$$\alpha(E_{12} - E_{21}) + \beta(E_{13} - E_{31}) + \gamma(E_{23} - E_{32}) = 0 \tag{1.24}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \tag{1.25}$$

Also ist $\{E_{12}-E_{21}, E_{13}-E_{31}, E_{23}-E_{32}\}$ eine Basis von $Alt(3;\mathbb{R})$ und $dim\, Alt(3;\mathbb{R}) = 3$.

(iv) $\{1, i\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ (auch $\{1+i, 1-i\}, \{7-3i, 5+2i\}$) und $dim\, \mathbb{C} = 2$. $Mat(2;\mathbb{C})$ **über** $\mathbb{R}$ hat eine Basis:

$$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, iE_{11}, iE_{12}, iE_{21}, iE_{22}\} \text{ und} \tag{1.26}$$

$$dim\, Mat(2,\mathbb{C}) = 8 \tag{1.27}$$

Beobachtung $Pol\,\mathbb{R}$ (auch $C(\mathbb{R}), \mathcal{F}, ...$) ist **nicht** endlich erzeugt: für jedes endliche $E \subseteq Pol\,\mathbb{R}$ git es $n \in N$ wobei $x^n \notin Span\, E$

$$\{1, x, x^2, x^3, ...\} \tag{1.28}$$

Frage: Hat jeder Vektorraum eine Basis?
Antwort: Ja! Aber wir müssen das so genannte “Zornsche Lemma” (äquivalent zum “Auswahlaxiom”) **annehmen**[3].

1.2 Geordnete Mengen

Eine **Halbordnung** (auch **Partialordnung** oder **Teilordnung**) einer Menge X ist eine binäre Relation

$$\leq \subseteq R \times R \tag{1.29}$$

(man schreibt $x \leq y$ statt $(x, y) \in \leq$) so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt

[3]Dieses ist nicht “bewiesen”. Gemäss Gödel ist dieses widerspruchsfrei mit den Grundsätzen der bestehenden Mathematik, das Gleiche gilt aber auch für die Umkehrung des Lemmas.

(i) $x \leq x$ (Reflexivität)

(ii) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

(iii) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

X mit $\leq$ heisst eine **halbgeordnete Menge**. Falls auch für alle $x, y \in X$ gilt:

(iv) $x \leq y$ oder $y \leq x$ heisst $\leq$ eine **Totalordnung** und X mit $\leq$ eine totalgeordnete Menge.

Beispiele

(i) Sei "$\leq$" die kleiner-gleich Relation: Dann sind $\mathbb{N}$ mit $\leq$, $\mathbb{R}$ mit $\leq$ usw. totalgeordnete Mengen.

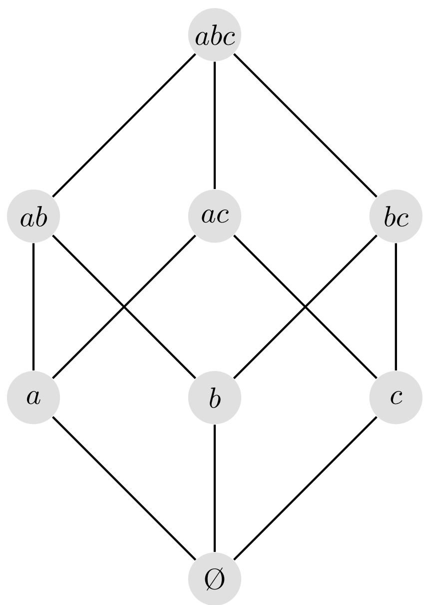
(ii) Sei Y eine Menge von Mengen. Dann gilt für alle $A, B, C \in Y$: $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$. Mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B$. Also ist Y mit $\leq$ eine halbgeordnete Menge (nicht notwendigerweise totalgeordnet).

(iii) $\mathbb{N}$ mit Teilbarkeit —

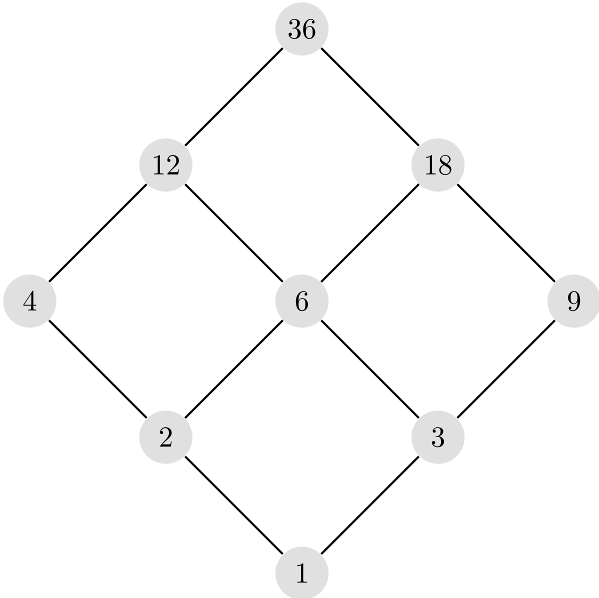
$$x|y \text{ gdw } y \text{ ist teilbar durch } x \tag{1.30}$$

ist eine halbgeordnete (nicht totalgeordnete) Menge.

Beobachtung Man kann eine endliche halbgeordnete Menge durch einen sogenanntes "Hasse Diagramm" darstellen.
z.B. $P(\{a, b, c\})$ mit $\subseteq$:



Die Teiler von 36 mit $\mid$:

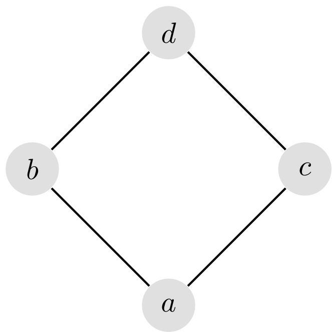


Vorlesung vom 24.02.2012

Beispiele

(i) Eine Menge W von Wörtern mit der alphabetischen / lexikographischen Ordnung (Totalordnung) ("Apfel" < "Bär" < "braun" < ...)

(ii) Die Unterräume eines Vektorraums mit $\subseteq$

(iii) 

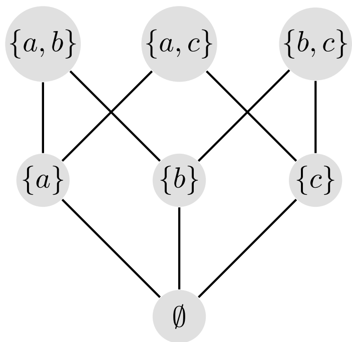
$$X = \{a, b, c, d\} \tag{1.31}$$
$$\subseteq = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\} \tag{1.32}$$

Sei X mit $\subseteq$ eine halbgeordnete Menge.

- $a \in X$ ist eine **obere Schranke** für $Y \subseteq X$ wenn $b \leq a \,\forall\, b \in Y$
- $a \in X$ ist ein **maximales Element**, wenn es kein $b \in X$ mit $b \neq a$ und $a \leq b$ gibt

Beispiel

- $P(\{a, b, c\}) \setminus \{a, b, c\}, \subseteq$:



$\{a, b\}$, $\{a, c\}$ und $\{b, c\}$ sind maximale Elemente.

- **Untere Schranken** und **minimale Elemente** sind analog definiert. $(X, \subseteq)$ heisst **induktiv**, wenn jede totalgeordnete Teilmenge Y von X eine obere Schranke in X hat. (Ist X **endlich**, dann ist $(X, \subseteq)$ immer induktiv. Aber z.B. $(\mathbb{N}, \subseteq)$ ist nicht induktiv.)

Das Zornsche Lemma
Eine induktive halbgeordnete Menge hat ein maximales Element.

Satz 1.2.1 *Jeder Vektorraum V hat eine Basis.*

Beweis Sei X die Menge aller linear unabhängiger Teilmengen von V. Wir zeigen, dass $(X, \subseteq)$ **induktiv** ist. Sei Y eine totalgeordnete Menge von X. Wir behaupten, dass

$$B = \bigcup_{A \in Y} A \tag{1.33}$$

linear unabhängig ist und deshalb eine obere Schranke von Y in X. Man betrachtet $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$ mit $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ und $v_1, ..., v_n \in B$ d.h. für $i = 1, ..., n : v_i \in A_i$ für ein $A_i \in Y$. Man darf auch annehmen: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n$, da Y totalgeordnet ist. Also ist $v_i \in A_n$ für $i = 1, ..., n$ und weil A_n linear unabhängig ist, folgt $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, d.h. B ist linear unabhängig. Nach dem Zornschen Lemma erhält man ein maximales Element M von X. Nach Definition von X ist M linear unabhängig.

Ist M ein Erzeugendensystem von V?
Sei $v \in V$. Ist $v \notin \mathit{Span}\, M$, dann ist $M \cup \{v\}$ linear unabhängig. Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von M. Also $\mathit{Span}\, M = V$ und M ist eine Basis von V. □

Bemerkung Das Zornsche Lemma ist äquivalent zu:

- dem **Auswahlaxiom**: "Für jede Menge von nichtleeren Mengen X gibt es eine Funktion

  $$f : X \to \cup X \tag{1.34}$$

  wobei $Y \in X \Rightarrow f(Y) \in Y$."
  Beispiel: $X = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \mathbb{N}\}$
  $f(\{a\}) = a, f(\{a, b, c\},) = b, f(\{b, c\}) = b, f(\mathbb{N}) = 73$

- dem **Wohlordnungssatz**: "Für jede Menge X gibt es eine 'Wohlordnung' $\subseteq$, d.h. eine Totalordnung von X, wobei jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes Element bezüglich $\subseteq$ hat."
  Beispiel: $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine wohlgeordnete Menge, aber nicht $(\mathbb{Z}, \leq)$ (kein kleinstes Element) oder $(\mathbb{R}, \leq)$: $0 < 1 < -1 < 2 < -2 < ...$ (hat $\mathbb{R}$ eine Wohlordnung?)

2 Eigenvektoren

2.1 Homomorphismen und Matrizen

Zur Erinnerung: Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heisst **Homomorphismus** (lineare Abbildung), wenn

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)\ x, y \in V$

(2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)\ x \in V, \alpha \in K$

Daraus folgt (durch Induktion):

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) \tag{2.1}$$

Man definiert auch: Kern $f := \{v \in V : f(v) = 0\}$, Bild $f := \{f(v) : v \in V\}$ und zeigt[1], dass wenn V endlich erzeugt ist, gilt:

$$dim\, Kern\, f + dim\, Bild\, f = dim\, V \tag{2.2}$$

Beispiele

(i) Sei $A \in Mat(m, n; K)$. Dann ist $h_A : K^n \to K^m, x \mapsto Ax$ ein Homomorphismus

$$\begin{aligned} h_A(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) && (2.3)\\ &= \alpha Ax + \beta Ay && (2.4)\\ &= \alpha h_A(x) + \beta h_A(y) && (2.5)\end{aligned}$$

(ii) Der **transponierte Operator** $f : Mat(m, n; K) \to Mat(m, n; K), A \mapsto A^T$ ist ein Homomorphismus, eigentlich ein **Isomorphismus**.

(iii) Die Abbildung

$$f : \mathbb{C}[0, 1] \to \mathbb{R}\ \ (\mathbb{C}[0, 1] = \{\phi \in Abb([0, 1], \mathbb{R}), \phi \text{ stetig.}\}) \tag{2.6}$$

$$\phi \mapsto \int_0^1 \phi(x)dx \tag{2.7}$$

$$\int_0^1 (\alpha\phi + \beta\chi)(x)dx = \alpha \int_0^1 \phi(x)dx + \beta \int_0^1 \chi(x)dx \tag{2.8}$$

[1] Lineare Algebra 1, Satz 4.2.5

Man kann Homomorphismen zwischen endlich erzeugten Vektorräumen **mit Matrizen darstellen**, z.B.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ -\alpha + \beta - 3\gamma \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

ist bezüglich der Standardbasen durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

gegeben.
Beachten Sie, dass

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Für einen Homomorphismus $f : K^n \to K^m$ betrachtet man $f(e_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} e_i, j = 1...n$ und erhält $f(x) = Ax$ mit $A = (\alpha_{ij})$.

Sei nun V ein endlich erzeugter Vektorraum über K und $B = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V. Man definiert

$$q_B : V \to K^n \tag{2.14}$$

$$v \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

mit $v = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n)$ ein Isomorphismus von V in K^n. Sei auch W ein endlich erzeugter Vektorraum über K und $C = (w_1, ..., w_m)$ eine geordnete Basis von W. Für ein Homomorphismus $f : V \to W$ betrachtet man

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i, j = 1...n \tag{2.16}$$

$$\text{d.h. } q_C(f(v_j)) = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

und erhält

$$\mathcal{M}_C^B(f) = (\alpha_{ij}) = (q_C(f(v_1))), ..., q_C(f(v_n)) \tag{2.18}$$

die **Matrix von f bezüglich der Basen B und C.**

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ q_B^{-1} \big\uparrow \big\downarrow q_B & & \big\downarrow q_C \\ K^n & \xrightarrow{\hat{f}} & K^m \end{array}$$

$$\hat{f} = q_C \circ f \circ q_B^{-1} \tag{2.19}$$

Man beobachtet:

$$\mathcal{M}_C^B(f)(q_B(v)) = (q_C \circ f \circ q_B^{-1})(q_B(v)) = q_C(f(v)) \tag{2.20}$$

Beispiel: $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ hat eine geordnete Basis $B = (1+i, 1-i)$. $P_2 = \{\alpha + \beta x + \gamma x^2 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ hat eine geordnete Basis $C = (1 + x^2, x, 2x^2 + 1)$.
Wir betrachten $f : \mathbb{C} \to P_2, a + bi \mapsto a + (a+b)x + bx^2$

$$f(1+i) = 1 + 2x + x^2 \tag{2.21}$$
$$= 1(1+x^2) + 2(x) + 0(2x^2+1) \tag{2.22}$$
$$f(1-i) = 1 - x^2 \tag{2.23}$$
$$= 3(1+x^2) + 0(x) + (-2)(2x^2+1) \tag{2.24}$$

Also

$$q_C(f(1+i)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

$$q_C(f(1-i)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathcal{M}_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Zum Beispiel:

$$q_B(5+i) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

$$q_C(f(5+i)) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

$$f(5+i) = 5 + 6x + x^2 = 9(1+x^2) + 6(x) + (-4)(2x^2+1) \tag{2.29}$$

Vorlesung vom 27.02.2012

2.1 Homomorphismen und Matrizen

Sei V ein Vektorraum über K und $B = (b_1, ..., b_n)$ eine (geordnete) Basis von V.
Frage: Wie beschreibt/findet man alle anderen Basen von V?

Sei $c_1, ..., c_n$ verschiedene Elemente von V mit

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} b_j \ (i = 1...n) \tag{2.30}$$

$$\text{d.h. } q_B(c_i) = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Dann ist $C = (c_1, ..., c_n)$ eine **Basis**

- gdw $c_1, ..., c_n$ linear unabhängig sind
- gdw $A = (\alpha_{ij}) = (q_B(c_1)...q_B(c_n)) \in GL(n; K)$, d.h. A ist **invertierbar**[2]

A ist die **Übergangsmatrix** T_B^C von C nach B, und A^{-1} ist die Übergangsmatrix von B nach C.

Man beobachtet, dass für $i = 1...n$

$$q_B(c_i) = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ni} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle} \tag{2.32}$$

$$= A q_C(c_i) \tag{2.33}$$

und deshalb, für alle $v \in V$

$$q_B(v) = A q_C(v), q_c(v) = A^{-1} q_B(v) \tag{2.34}$$

Beispiel: $B = (1 + x, 1 - x)$ ist eine Basis von $P_1 = \{\alpha x + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{R}) \tag{2.35}$$

[2]Lineare Algebra 1, Lemma 5.4.1

Also ist (c_1, c_2) eine Basis von P_1 mit

$$q_B(c_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, q_B(c_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

$$c_1 = 3(1+x) + 2(1-x) = x + 5 \tag{2.37}$$

$$c_2 = 2(1+x) - 1(1-x) = 3x + 1 \tag{2.38}$$

Betrachten Sie nun endlich erzeugte Vektorräume

- V mit Basis B
- W mit Basis C

und einen Homomorphismus

$$f : V \to W \tag{2.39}$$

Dann gilt für **andere Basen** B' von V und C' von W:

$$q'_B = h_{T^B_{B'}} \circ q_B \tag{2.40}$$

$$q'_C = h_{T^C_{C'}} \circ q_C \tag{2.41}$$

$$h_{\mathcal{M}^B_C(f)} = q_C \circ f \circ q_B^{-1} \tag{2.42}$$

$$\boxed{h_{\mathcal{M}^{B'}_{C'}(f)}} = q_{C'} \circ f \circ (q_{B'})^{-1} \tag{2.43}$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "q_B"] & W \arrow[d, "q_C"] \\
K^n \arrow[u, shift left, "q_B^{-1}"] \arrow[r, "\hat{f}", "q_C \circ f \circ q_B^{-1}"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

$$= (h_{T^C_{C'}} \circ q_C) \circ f \circ (h_{T^B_{B'}} \circ q_B)^{-1} \tag{2.44}$$

$$= h_{T^C_{C'}} \circ (q_C \circ f \circ q_B^{-1}) \circ (h_{T^B_{B'}})^{-1} \tag{2.45}$$

$$= h_{T^C_{C'}} \circ h_{\mathcal{M}^B_C(f)} \circ (h_{T^B_{B'}})^{-1} \tag{2.46}$$

$$\text{und } \mathcal{M}^{B'}_{C'}(f) = T^C_{C'}, \mathcal{M}^B_C(f)(T^B_{B'})^{-1} \tag{2.47}$$

Deshalb ist A die Matrix von f bezüglich anderen Basen **gdw**

$$A = Q\mathcal{M}^B_C(f)P^{-1} \tag{2.48}$$

für **beliebige** invertierbare Matrizen P und Q.

Frage: Wie findet man die 'beste Matrix-Darstellung' von f?
Antwort: Man verwendet elementare Spalten- und Zeilenumformungen .

Beispiel $\mathbb{R}^3$ mit Basis

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{2.49}$$

$\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ mit Basis $C = (1, i)$.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma)i \tag{2.50}$$

$$\mathcal{M}_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

Wir suchen eine Darstellung:

$$Q\mathcal{M}_C^B(f)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z_1 \to Z_1 - Z_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

$$S_3 \to S_3 + S_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} S_3 \to S_3 - S_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (= T_{C'}^C), Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (= (T_{B'}^B)^{-1} = T_B^{B'}) \tag{2.56}$$

Wir definieren:

$$B' = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{2.57}$$

$$C' = (1, 1 + i) \tag{2.58}$$

und beobachten, dass

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = 1(1) + 0(1+i) = 1 \tag{2.59}$$

$$f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = 0(1) + 1(1+i) = 1+i \tag{2.60}$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}) = 0(1) + 0(1+i) = 0 \tag{2.61}$$

$$\text{d.h. } \mathcal{M}_{C'}^{B'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Bemerkung

(a) Zu jeder $A \in Mat(m,n;K)$ gibt es Produkte $Q \in GL(n;K)$ und $P^{-1} \in GL(n;K)$ von Elementarmatrizen mit

$$QAP^{-1} = \begin{pmatrix}E^{(r)} & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, r = \text{ Rang } A \tag{2.63}$$

[3]

(b) Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus zwischen den endlich erzeugten Vektorräumen V und W. Man kann Basen B und C finden, so dass

$$\mathcal{M}_C^B(f) = \begin{pmatrix}E^{(r)} & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, r = \text{ Rang } f. \tag{2.64}$$

2.2 Endomorphismen und Eigenvektoren

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Wir betrachten nun **Endomorphismen**

$$f : V \to V \tag{2.65}$$

und suchen Matrixdarstellungen bezüglich **einer einzigen Basis** B_j d.h.

$$\mathcal{M}_B(f) := \mathcal{M}_B^B(f) \tag{2.66}$$

Beobachtung Sei $A \in Mat(n;K)$ die Matrixdarstellung von $f : V \to V$ bezüglich einer Basis B von V, d.h. $A = \mathcal{M}_B(f)$. Dann ist $A' \in Mat(n;K)$ die Matrixdarstellung von f bezüglich einer anderen Basis gdw

$$A' = PAP^{-1} \tag{2.67}$$

für eine beliebige invertierbare Matrix $P \in GL(n;K)$

[3] Lineare Algebra 1, Satz 5.3.9

Anmerkung Man sucht $P \in GL(n;K)$ so dass PAP^{-1} 'einfach' - vielleicht diagonal - ist. Aber wir haben jetzt nur noch eine Basis und damit auch nur eine Matrix P zur Verfügung.
Man probiert vielleicht Elementarmatrizen $P_1, ..., P_k$ zu finden mit $P_1, ..., P_k = P_1$.

$$PAP^{-1} = P_1, ..., P_k A P_k^{-1}, ..., P_1^{-1} \tag{2.68}$$

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums. Ein Unterraum W von V heisst **f-invariant**, wenn

$$f(W) \subseteq W \tag{2.69}$$

In diesem Fal ist $f : W \to W$ die **Beschränkung von f auf W**, auch ein Endomorphismus.

Beispiel

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{2.70}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha + \beta \\ \alpha + \gamma \end{pmatrix} \tag{2.71}$$

$$W = Span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \tag{2.72}$$

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \tag{2.73}$$

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

Also ist $f(W) \subseteq W$ und W ist f-invariant.

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums und

$$(w_1, ..., w_k) \tag{2.75}$$

eine Basis eines f-invarianten Unterraums W von V. Sei nun

$$B = (w_1, ..., w_k, v_1, ..., v_{n-k}) \tag{2.76}$$

eine Basis von V. Dann hat $\mathcal{M}_B(f)$ die Form

$$\begin{pmatrix} A_1 & D \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

wobei $A \in Mat(k;K)$ die Matrixdarstellung von $f : W \to W$ bezüglich $(w_1, ..., w_k)$ ist.

Beispiel (siehe oben)
$\mathbb{R}^3$ hat eine Basis:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

Wenn $V = W_1 \oplus W_2$ ($V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$) und W_1, W_2 f-invariante Unterräume sind, erhält man eine Basis von V:

$$B = (\underbrace{w_1, ..., w_k}_{\text{Basis von } W_1}, \underbrace{v_1, ..., v_{n-k}}_{\text{Basis von } W_2}) \tag{2.79}$$

und $\mathcal{M}_B(f)$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

Idee Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ suchen wir **1-dimensionale f-invariante Unterräume**. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V über K. Wenn

$$f(v) = \alpha v \text{ mit } 0 \neq v \in V, \alpha \in K \tag{2.81}$$

heisst v ein **Eigenvektor** und ein **Eigenwert** (der zum Eigenvektor v gehört) von f.

Vorlesung vom 05.03.2012

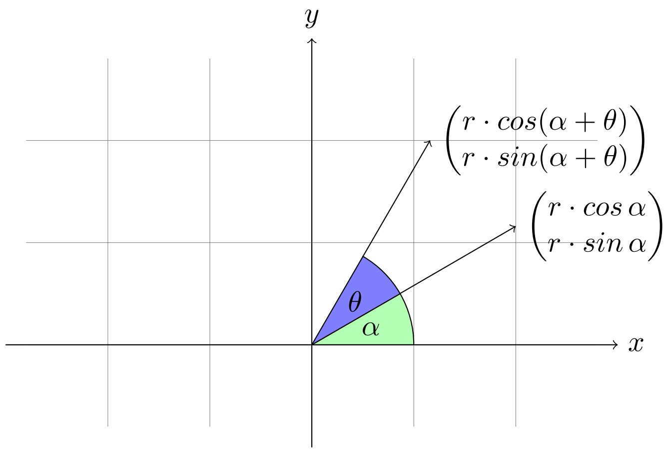
2.2 Endomorphismen und Eigenvektoren

Beispiel Betrachte den **Endomorphismus**

$$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \cdot cos(\alpha) \\ r \cdot sin(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot cos(\alpha + \theta) \\ r \cdot sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \tag{2.83}$$

eine **Drehung** der Ebene um einen Winkel θ.



$$f_\theta(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = f_\theta(\begin{pmatrix} 1\, cos(0) \\ 1\, sin(0) \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

$$f_\theta(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = f_\theta(\begin{pmatrix} 1\, cos(\frac{\pi}{2}) \\ 1\, sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

$$\tag{2.86}$$

Die Matrixdarstellung von f_θ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ ist

$$\mathcal{M}_B(f_\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.87}$$

Betrachte nun auch

$$g_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \cdot cos(\alpha) \\ r \cdot sin(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot cos(\theta - \alpha) \\ r \cdot sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix} \tag{2.88}$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \tag{2.89}$$

$$g_\theta(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = g_\theta(\begin{pmatrix}1\,cos(0)\\1\,sin(0)\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}cos(\theta)\\sin(\theta)\end{pmatrix} = f_\theta(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) \tag{2.90}$$

$$g_\theta(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = g_\theta(\begin{pmatrix}1\,cos(\frac{\pi}{2})\\1\,sin(\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}cos(\theta-\frac{\pi}{2})\\sin(\theta-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-sin(\theta)\\cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{2.91}$$

$$\tag{2.92}$$

g_θ ist eine **Spiegelung** an der Gerade mit dem Winkel $\frac{\theta}{2}$

$$\mathcal{M}_B(g_\theta) = \begin{pmatrix}cos(\theta) & sin(\theta)\\sin(\theta) & -cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{2.93}$$

Beachte, dass

$$g_\theta(\begin{pmatrix}cos(\frac{\theta}{2})\\sin(\frac{\theta}{2})\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}cos(\frac{\theta}{2})\\sin(\frac{\theta}{2})\end{pmatrix} \tag{2.94}$$

$$g_\theta(\begin{pmatrix}cos(\frac{\theta+\pi}{2})\\sin(\frac{\theta+\pi}{2})\end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix}cos(\frac{\theta+\pi}{2})\\sin(\frac{\theta+\pi}{2})\end{pmatrix} \tag{2.95}$$

$$\tag{2.96}$$

d.h.

$$Span\{\begin{pmatrix}cos(\frac{\theta}{2})\\sin(\frac{\theta}{2})\end{pmatrix}\} \text{ und} \tag{2.97}$$

$$Span\{\begin{pmatrix}cos(\frac{\pi+\theta}{2})\\sin(\frac{\pi+\theta}{2})\end{pmatrix}\} \text{ und} \tag{2.98}$$

$$\tag{2.99}$$

sind g_θ**-invariant**.

Man erhält eine **Basis**:

$$C = \left(\begin{pmatrix}cos(\frac{\theta}{2})\\sin(\frac{\theta}{2})\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}cos(\frac{\theta+\pi}{2})\\sin(\frac{\theta+\pi}{2})\end{pmatrix}\right) \tag{2.100}$$

$$\text{mit } \mathcal{M}_C(g_\theta) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \tag{2.101}$$

Beobachten Sie jedoch, dass

$$f_\theta(v) = \alpha v \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}, 0 \neq v \in \mathbb{R}^2 \tag{2.102}$$

$$\text{nur wenn } \theta = 0, \theta = 2\pi \text{ oder } \theta = \pi \tag{2.103}$$

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V über K. Wenn

$$f(v) = \alpha v \text{ mit } 0 \neq v \in V, \alpha \in K \tag{2.104}$$

heisst v ein **Eigenvektor** und α ein **Eigenwert** (der zum Eigenvektor v gehört) von f. Beachte, dass für $0 \neq v \in V$ gilt:

$$v \text{ ist ein Eigenvektor von } V \Leftrightarrow Span\{v\} \text{ ist } f\text{-invariant} \tag{2.105}$$

$\Leftarrow$ $f(v) \in Span\{v\} \Rightarrow f(v) = \alpha v$

$\Rightarrow$ $f(v) = \alpha v \Rightarrow f(\beta v) = \beta f(v) = \beta\alpha v \in Span\{v\}$

Für $A \in Mat(n;K)$ ist v ein **Eigenvektor** und α ein **Eigenwert** von A, wenn $Av = \alpha v$ mit $0 \neq v \in K^n$ und $\alpha \in K$.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \in Mat(2;\mathbb{R}) \tag{2.106}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.107}$$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2.108}$$

Also ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -2 von A.
Daraus folgt, dass

- $Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ und $Span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ h_A-invarant sind
- $\mathbb{R}^2 = Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\} \oplus Span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ und $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist
-

$$\mathcal{M}_B(h_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{2.109}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \tag{2.110}$$

$$P = T_B^C, P^{-1} = T_C^B \text{ mit } C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \tag{2.111}$$

Eine Matrix $A \in Mat(n;K)$ ist **ähnlich** zu einer Matrix $B \in Mat(n;K)$ wenn es eine Matrix $P \in GL(n;K)$ mit $B = PAP^{-1}$ gibt.

Sei $A \in Mat(n;K)$ die Matrixdarstellung eines Endomorphismus $f : V \to V$ bezüglich einer Basis. Wir haben schon gesehen, dass $B \in Mat(n;K)$ die Matrixdarstellung bezüglich einer anderen Basis ist **gdw** B ähnlich zu A ist.

Lemma 2.2.1 *Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.*

Beweis Seien $A, B \in Mat(n;K)$ mit $B = PAP^{-1}, P \in GL(n;K)$. Wenn $Av = \alpha v$ für $0 \neq v \in V$ und $\alpha \in K$ gilt $Pv \neq 0$ und

$$B(Pv) = (PAP^{-1})(Pv) = P(Av) = P(\alpha v) = \alpha(Pv) \tag{2.112}$$

□

Bemerkung Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ und eine Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ von V:

- v_i ist ein Eigenvektor von f zum Eigenwert α **gdw** die i-te Spalte von

$$\mathcal{M}_B(f) = (q_B(f(v_1)), ..., q_B(f(v_n))) \tag{2.113}$$

  αe_i ist.
- $\mathcal{M}_B(f)$ ist eine **Diagonalmatrix gdw** $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren sind
- $\mathcal{M}_B(f)$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix **gdw** es eine Basis $(w_1, ..., w_n)$ von V gibt, die aus Eigenvektoren besteht.

2.3 Das charakteristische Polynom

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V über K.
Frage: Wie findet man die **Eigenvektoren** von f?
Man bestimmt zuerst die **Eigenwerte** von f (nicht immer einfach!). Dann kann man das System $f(V) = \alpha v$ für ein bestimmtes $\alpha \in K$ lösen.

Beachte nun, dass für $0 \neq v \in V$ und $\alpha \in K$:

$$\begin{aligned} f(v) = \alpha v &\Leftrightarrow f(v) - \alpha v = 0 && (2.114)\\ &\Leftrightarrow (f - \alpha Id)v = 0 && (2.115)\\ &\Leftrightarrow v \in Kern(f - \alpha Id) && (2.116)\\ & && (2.117)\end{aligned}$$

wobei $Id : V \to V, w \mapsto w$ der Identische Endomorphismus ist, und $f - \alpha Id : V \to V, x \mapsto f(x) - \alpha x$ auch ein Endomorphismus ist. Man braucht

$$Kern(f - \alpha Id) \neq \{0\} \tag{2.118}$$

Lemma 2.3.1 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines* ***endlich****-dimensionalen Vektorraums. Dann sind äquivalent:*

(i) $Kern\, f \neq \{0\}$

(ii) $Bild\, f \neq V$

(iii) $Det\, A = 0$ *für jede Matrixdarstellung A von f*

(iv) 0 ist ein Eigenwert von f

In diesem Fall heisst f ***singulär****, andernfalls* ***nichtsingulär****.*

Beweis

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Nach der Dimensionsformel
- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $Bild\, f \neq V$ **gdw** A ist nicht invertierbar **gdw** $det\, A = 0$
- (i) $\Leftrightarrow$ (iv) $Kern\, f \neq \{0\}$ **gdw** $f(v) = 0$ für ein $0 \neq v \in V$ **gdw** 0 ist ein Eigenwert von f.

$\square$

Korollar 2.3.2 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K. Dann sind äquivalent für jedes $\alpha \in K$:*

(i) α ist ein Eigenwert von f

(ii) $f - \alpha Id$ ist ***singulär****.*

Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax \tag{2.119}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \tag{2.120}$$

α ist ein Eigenwert von f (von A)

- **gdw** $Kern(f - \alpha Id) \neq 0$
- **gdw** $det(A - \alpha E) = 0$
- **gdw**

$$det \begin{pmatrix} 10 - \alpha & -18 \\ 6 & -11 - \alpha \end{pmatrix} = 0 \tag{2.121}$$

- **gdw** $(10 - \alpha)(-11 - \alpha) - (-18)(6) = 0$

- **gdw** $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$
- **gdw** $(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$
- **gdw** $\alpha = -2$ oder $\alpha = 1$

Wir lösen das Gleichungssystem

$$(A - (-2)E)x = 0 \tag{2.122}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.123}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} : \lambda \neq 0 \right\} \text{ sind Eigenvektoren zum Eigenwert -2} \tag{2.124}$$

$\alpha = 1$ Aufgabe.

Vorlesung vom 09.03.2012
Ergänzung zum Beispiel

$$(A-(1)E)x = 0 \tag{2.125}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -18 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.126}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1\lambda \end{pmatrix} : \lambda \neq 0 \right\} \text{ sind Eigenvektoren zum Eigenwert } 1 \tag{2.127}$$

Zur Erinnerung: Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V über K, und sei $A \in Mat(n; K)$ eine Matrixdarstellung von f.

Anmerkung Ähnliche Matrizen ($B = PAP^{-1}$ für $P \in GL(n; K)$) stellen denselben Endomorphismus dar, und haben dieselben Eigenwerte (Lemma 2.2).

Dann gilt: $\alpha \in K$ ist ein Eigenwert von f ist äquivalent mit:

$$\Leftrightarrow \alpha \in K \text{ ist ein Eigenwert von } A \text{, d.h. } Ax = \alpha x \text{ für ein } 0 \neq x \in K^n \tag{2.128}$$

$$\Leftrightarrow (A - \alpha E)x = 0 \text{ für ein } 0 \neq x \in K^n \tag{2.129}$$

$$\Leftrightarrow Kern(A - \alpha E) \neq \{0\} \tag{2.130}$$

$$\Leftrightarrow det(A - \alpha E) = 0 \tag{2.131}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{R}) \tag{2.132}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ ist ein Eigenwert von } A \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-\alpha & -2 \\ -5 & 1-\alpha \end{vmatrix} \tag{2.133}$$

$$\Leftrightarrow (-2-\alpha)(1-\alpha) - (-5)(-2) = 0 \tag{2.134}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \tag{2.135}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 4)(\alpha - 3) = 0 \tag{2.136}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -4 \text{ oder } \alpha = 3 \tag{2.137}$$

Eigenvektoren von A:

- $\alpha = -4$:

$$Ax = -4x \tag{2.138}$$

$$\Leftrightarrow (A - (-4) \cdot E)x = 0 \tag{2.139}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.140}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.141}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \tag{2.142}$$

- Eigenvektoren für -4:

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\end{pmatrix} : \lambda \neq 0\right\} \tag{2.143}$$

- $\alpha = 3$:

$$\Leftrightarrow (A-(3)E)\cdot x = 0 \tag{2.144}$$

$$\begin{pmatrix}-5 & -2\\ -5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.145}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{5}x_2 \tag{2.146}$$

- Eigenvektoren für 3:

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\lambda\\ 5\lambda\end{pmatrix} : \lambda \neq 0\right\} \tag{2.147}$$

Man beachte auch, dass

$$(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\ 5\end{pmatrix}) \tag{2.148}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und

$$\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = PAP^{-1} \tag{2.149}$$

mit

$$p^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}, p = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \tag{2.150}$$

Man sagt A ist **diagonalisierbar**.

Für $A \in Mat(n;K)$ sucht man $\alpha \in K$ so, dass $det(A-\alpha E) = 0$ die Eigenwerte von A sind. Man betrachtet das charakteristische Polynom von A:

$$P_A(t) = det(tE - A) \tag{2.151}$$

aus dem Polynomring über K.

$$K[t] = \{B_0 + B_1t + ... + B_mt^m : B_0, ..., B_m \in K\} \tag{2.152}$$

Man braucht hier $n \times n$ Matrizen über einem Ring und verwendet für $A = (\alpha_{ij})$:

$$detA := \sum_{\pi \in S_n} (\epsilon(\pi)_{\alpha,\pi(1),...,\pi(n)}) \tag{2.153}$$

wobei $\epsilon(\pi) = det(e\pi(1), ..., e\pi(n))$

Beispiel

$$det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \tag{2.154}$$

Dann gilt: α ist ein Eigenwert von A

- gdw. $det(A - \alpha E) = 0$
- gdw. $det(\alpha E - A) = 0$
- gdw. $P_A(\alpha) = 0$ („α ist die Nullstelle von P_A")

Bemerkungen

(1) Die Eigenwerte einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix sind ihre Diagonaleinträge, z.B. für $A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t - \alpha_{11} & \cdots & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & t - \alpha_{nn} \end{vmatrix} = (t - \alpha_{11})(t - \alpha_{22})...(t - \alpha_{nn}) \tag{2.155}$$

$$\tag{2.156}$$

und die Eigenwerte von A sind $\alpha_{11}, ..., \alpha_{nn}$

(2) Beachte, dass für $A \in Mat(2; K)$:

$$P_A(t) = det(tE - A) = \begin{vmatrix} t - \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & t - \alpha_{22} \end{vmatrix} = (t - \alpha_{11})(t - \alpha_{22}) - \alpha_{21}\alpha_{12} \tag{2.157}$$

$$= t^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})t + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) \tag{2.158}$$

Für $K = \mathbb{R}$ gibt es Eigenwerte gdw.

$$(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 - 4(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21} \geq 0 \tag{2.159}$$

z.B. wenn $\alpha_{12}, \alpha_{21} \geq 0$.
Für $K = \mathbb{C}$ gibt es immer Eigenwerte.

(3) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums, und sei A eine Matrixdarstellung. Dann sind die Eigenwerte von f die Eigenwerte von A, d.h. die Nullstellen von $P_A(t)$.

Satz 2.3.3 *Alle Matrizen, die einen Endomorphismus $f : V \to V$ bezüglich verschiedener Basen darstellen, haben dasselbe charakteristische Polynom.*

Beweis
Sei $A \in Mat(n; K)$ eine Darstellung von f bbezüglich einer Basis. wenn $B \in Mat(n; K)$ eine Darstellung vo f ist bezüglich einer anderen Basis, dann gilt:

$$B = PAP^{-1} \text{ für ein } P \in GL(n; K) \tag{2.160}$$

Daraus folgt

$$tE - B = tE - PAP^{-1} = P(tE)P^{-1} - PAP = P(tE - A)P^{-1} \tag{2.161}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
P_B(t) &= det(tE - B) && (2.162)\\
&= det(P(tE - A)P^{-1}) && (2.163)\\
&= det\,P \cdot det(tE - A) \cdot det(P^{-1}) && (2.164)\\
&= det\,P \cdot det(tE - A) \cdot (det\,P)^{-1} && (2.165)\\
&= det(tE - A) && (2.166)\\
&= P_A(t) && (2.167)
\end{aligned}$$

□

Beachten wir nun, dass für $A \in Mat(n; K)$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t-\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & t-\alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & t-\alpha_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.168}$$

$$= (t - \alpha_{11})(t - \alpha_{22}) \cdot ... \cdot (t - \alpha_{nn}) + q(t) \tag{2.169}$$

wobei für $(tE - A) = (B_{ij})$:

$$q(t) = \sum_{\pi \in S_n \setminus \{Id\}} (\epsilon(\pi)B_{1,\pi(1)}, ..., B_{n,\pi(n)}) \tag{2.170}$$

ein Polynom vom Grad höchstens $n - 2$ ist. Beachte auch, dass

$$(t - \alpha_{11})...(t - \alpha_{nn}) = t^n - (\alpha_{11} + ... + \alpha_{nn})t^{n-1} + r(t) \tag{2.171}$$

wobei $r(t)$ ein Polynom vom Grad höchstens $n - 2$ ist.

Man definiert:

$$Spur\,A = \alpha_{11} + ... + \alpha_{nn} \tag{2.172}$$

und beobachtet, dass $P_A(t) = t^n - (Spur\ A) \cdot t^{n-1} +$ (übrige Terme) $+(-1)^n$.
Nach Satz 2.3.3 folgt, dass für $P \in GL(n; K)$:

$$Spur(PAP^{-1}) = Spur\ A \tag{2.173}$$

da die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms für ähnliche Matrizen gleich sind.

Beispiel Betrachte für $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{R}) \tag{2.174}$$

die Matrixdarstellung einer Spiegelung an der Geraden mit dem Winkel $\frac{\theta}{2}$ bezüglich der Standardbasis.

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t - cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & t + cos\,\theta \end{vmatrix} \tag{2.175}$$

$$= (t - cos\,\theta)(t + cos\,\theta) - sin^2\,\theta \tag{2.176}$$

$$= t^2 cos^2(\theta) - sin^2(\theta) \tag{2.177}$$

$$= t^2 - 1 \tag{2.178}$$

$$= (t-1)(t+1) \tag{2.179}$$

- Eigenwert 1

$$\begin{pmatrix} 1 - cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & 1 + cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.180}$$

$$\tag{2.181}$$

- Eigenvektoren

$$\{\lambda \begin{pmatrix} cos\frac{\theta}{2} \\ sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} : \lambda \neq 0\} \tag{2.182}$$

- Eigenwert -1

$$\begin{pmatrix} -1 - cos\,\theta & sin\,\theta \\ sin\,\theta & -1 + cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.183}$$

$$\tag{2.184}$$

- Eigenvektoren

$$\{\lambda \begin{pmatrix} cos\frac{\theta+\pi}{2} \\ sin\frac{\theta+\pi}{2} \end{pmatrix} : \lambda \neq 0\} \tag{2.185}$$

Betrachte nun für $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$B = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{R}) \tag{2.186}$$

die Matrixdarstellung einer Drehung der Ebene um einen Winkel θ bezüglich der Standardbasis.

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} t - cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & t + cos\,\theta \end{vmatrix} \tag{2.187}$$

$$= (t - cos\,\theta) + sin^2\,\theta \tag{2.188}$$

$$= t^2 - (2cos\,\theta)t + 1 \tag{2.189}$$

B hat Eigenwerte (in $\mathbb{R}$) nur wenn

$$4cos^2\,\theta - 4 \geq 0 \tag{2.190}$$

d.h. $cos^2\,\theta = 1$ gilt, was bedeutet, dass $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$.

Aber man kann auch $B \in Mat(2, \mathbb{C})$ betrachten und dann hat B immer zwei komplexe Eigenwerte

$$\frac{2cos\,\theta \pm \sqrt{4cos^2\,\theta - 4}}{2} = cos\,\theta \pm isin\,\theta \tag{2.191}$$

Sätze ohne Beweis (Siehe Algebra I)

(1) Sei K ein Körper, und sei $p(t)$ ein Polynom vom Grad n mit Koeffizienten in K. Dann hat p höchstens n Nullstellen in K.

(2) Jedes Polynom positiven Grades mit komplexen Koeffizienten hat mind. eine komplexe Nullstelle (Fundamentalsatz der Algebra).

Korollar 2.3.4 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K.*

(a) Hat V Dimension n, so hat f höchstens n Eigenwerte.

(b) Wenn $K = \mathbb{R}$ und $V \neq \{0\}$, dann hat f mindestens einen Eigenwert und daher auch einen Eigenvektor.

Frage Für einen Endomorphismus $f : V \to V$: Wann kann man eine Basis von Eigenvektoren von F finden?

Beispiel Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{R}) \tag{2.192}$$

hat einen Eigenwert von 4 und Eigenvektoren für 4 in $Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Also ist $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ eine basis von Eigenvektoren von A.

Auf der anderen Seite hat die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{R}) \tag{2.193}$$

auch einen Eigenwert von 4 und Eigenvektoren für 4 in $Span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Also hat man keine Basis von Eigenvektoren von B.

Vorlesung vom 12.03.2012

2.4 Diagonalisierbarkeit

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \in Mat(3, \mathbb{C}) \tag{2.194}$$

$$p_A(t) = det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 1 \\ 1 & -5 & t+2 \end{vmatrix} \tag{2.195}$$

$$= (t-1)((t-2)(t+2) - (1)(-5)) \tag{2.196}$$

$$= (t-1)(t^2+1) \tag{2.197}$$

$$= (t-1)(t-i)(t+i) \tag{2.198}$$

- Eigenwert 1:

$$(1E - A)x = 0 \tag{2.199}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_3, x_1 = 2x_2 \tag{2.200}$$

- Eigenvektoren:

$$Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}/\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \tag{2.201}$$

- Eigenwert i:

$$(iE - A)x = 0 \tag{2.202}$$

$$\begin{pmatrix} i-1 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 1 \\ 0 & -5 & i+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, x_3 = (2-i)x_2 \tag{2.203}$$

- Eigenvektoren:

$$Span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}\}/\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \tag{2.204}$$

- Eigenwert -i:

$$(-iE - A)x = 0 \tag{2.205}$$

$$\begin{pmatrix} -i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -i-2 & 1 \\ 0 & -5 & -i+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, x_3 = (i+2)x_2 \tag{2.206}$$

- Eigenvektoren:

$$Span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i+2 \end{pmatrix}\}/\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \tag{2.207}$$

Dann ist

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i+2 \end{pmatrix}\} \tag{2.208}$$

eine Basis und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = PAP^{-1} \tag{2.209}$$

wobei

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-i & i+2 \end{pmatrix} \tag{2.210}$$

$$P = -\frac{i}{4} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -1-i & 4+2i & -2 \\ 1-i & -4+2i & 2 \end{pmatrix} \tag{2.211}$$

Satz 2.4.1 *(a) Jede $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.*

(b) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums über $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine Basis B von V, so dass $\mathcal{M}_B(f)$ obere Dreiecksform hat.

Beweis (b) folgt direkt aus (a). Wir zeigen (a) durch Induktion nach n.

- **Induktionsanfang:** $n = 1$, klar

- **Induktionsschritt:** Wir nehmen an, dass die Behauptung für n gilt. Wir betrachten $A \in Mat(n+1,\mathbb{C})$. Nach Korollar 2.3.4 hat A mindestens einen Eigenwert α und Eigenvektor v zu α. Wir setzen v zu einer Basis $B = (v, v_1, ..., v_n)$ von $\mathbb{C}^{n+1}$ fort. Wir erhalten

$$B = PAP^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{2.212}$$

mit $P \in GL(n+1,\mathbb{C})$ und $B' \in Mat(n;\mathbb{C})$.

Nach Induktionsannahme gibt es $Q \in GL(n;\mathbb{C})$, so dass $QB'Q^{-1} \in Mat(n;\mathbb{C})$ obere Dreiecksform hat.
Sei

$$Q' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in GL(n+1,\mathbb{C}) \tag{2.213}$$

Dann hat

$$(Q'P)A(Q'P)^{-1} = Q'PAP^{-1}(Q')^{-1} \tag{2.214}$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & QB'Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{2.215}$$

obere Dreiecksform und ist zu A ähnlich (da $Q'P \in GL(n+1,\mathbb{C})$). □

Satz 2.4.2 *(a) Jede Matrix $A \in Mat(n;K)$ deren charakteristisches Polynom in K in Linearform zerfällt ($p_A(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)...(t-\alpha_n)$), ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.*

(b) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K, und nehmen wir an, dass das charakteristische Polynom von f in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es eine Basis B von V, so dass $\mathcal{M}_B(f)$ obere Dreiecksform hat.

Beweis Ähnlich wie der Beweis von Satz 2.4.1. □

Satz 2.4.3 *Seien $v_1, ..., v_n \in V$ Eigenvektoren eines Endomorphismus $f : V \to V$ zu* ***paarweise verschiedenen*** *Eigenwerten $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Dann sind $v_1, ..., v_n$* ***linear unabhängig****.*

Beweis Induktion über n.

- **Induktionsanfang:** $n = 1$, $0 \neq v \in V$ ist linear unabhängig.
- **Induktionsschritt:** Wir nehmen an, dass die Behauptung für n gilt. Wir betrachten
  (1) $\beta_1 v_1 + ... + \beta_{n+1} v_{n+1} = 0$ (zu zeigen: $\beta_1 = ... = \beta_{n+1} = 0$) und beachten, dass
  (2)

$$f(\beta_1 v_1 + ... + \beta_{n+1} v_{n+1}) = \beta_1 f(v_1) + ... + \beta_{n+1} f(v_{n+1}) \tag{2.216}$$
$$= \beta_1 \alpha_1 v_1 + ... + \beta_{n+1} \alpha_{n+1} v_{n+1} \tag{2.217}$$
$$= f(0) = 0 \tag{2.218}$$

Daraus folgt ($\alpha_{n+1} x (1) - (2)$)

$$\beta_1(\alpha_{n+1} - \alpha_1) v_1 + ... + \beta_n(\alpha_{n+1} - \alpha_n) v_n = 0 \tag{2.219}$$

Nach Induktionsannahme

$$\beta_1(\alpha_{n+1} - \alpha_1) = ... = \beta_n(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0 \tag{2.220}$$

Da $\alpha_{n+1} \neq \alpha_i$ für $i = 1...n$

$$\beta_1 = ... = \beta_n = 0 \tag{2.221}$$

und wir erhalten (in (1))

$$\beta_{n+1} v_{n+1} = 0 \tag{2.222}$$

Aber $v_{n+1} \neq 0$ und deshalb auch $\beta_{n+1} = 0$. □

Zur Erinnerung: Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ und ene Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ von V:

$$\mathcal{M}_B(f) \text{ ist } \textbf{diagonal} \Leftrightarrow v_1, ..., v_n \text{ sind } \textbf{Eigenvektoren} \text{ von } f \tag{2.223}$$
$$\mathcal{M}_B(f) = (q_B(f(v_1))...q_B(f(v_n))) \tag{2.224}$$

Korollar 2.4.4 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V über K mit $\dim V = n$, und seien $v_1, ..., v_n \in V$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Dann gilt:*

(i) $(v_1, ..., v_n)$ ist eine Basis von V (gemäss Satz 2.4.3)

(ii) $\mathcal{M}_B(f)$ ist diagonal

(iii) $p_A(t) = (t - \alpha_1)...(t - \alpha_n)$ für jede Matrixdarstellung A von f.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in Mat(3; \mathbb{C}) \tag{2.225}$$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & -4 \\ -2 & t & -2 \\ -4 & -2 & t-3 \end{vmatrix} \tag{2.226}$$

$$= t^3 - 6t^2 - 15t - 8 \tag{2.227}$$

$$= (t+1)^2(t-8) \tag{2.228}$$

- Eigenwert -1:

$$(-1E - A)x = 0 \tag{2.229}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -2x_1 - 2x_3 \tag{2.230}$$

- Eigenvektoren

$$\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha - 2\beta \\ \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}/\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \tag{2.231}$$

$$= Span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \}/\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \tag{2.232}$$

- Eigenwert 8

$$(8E - A)x = 0 \tag{2.233}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2x_2, x_3 = 2x_2 \tag{2.234}$$

- Eigenvektoren

$$Span\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\}/\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\} \tag{2.235}$$

Dann ist

$$B = \{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\} \tag{2.236}$$

eine Basis von $\mathbb{C}^3$ die aus Eigenvektoren von A besteht, und

$$\mathcal{M}_B(h_A) = \begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} = PAP^{-1} \tag{2.237}$$

$$\text{mit } P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & -2 & -2\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}, P = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\5 & -2 & -4\\-4 & -2 & 5\end{pmatrix} \tag{2.238}$$

Satz 2.4.5 *Sei $A \in Mat(n;K)$ und sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von K^n die aus Eigenvektoren von A besteht. Dann ist PAP^{-1} diagonal mit*

$$P^{-1} = (v_1, ..., v_n) \in GL(n;K) \tag{2.239}$$

Beweis Eigenvektoren von A sind Eigenvektoren von $h_A : K^n \to K^n$. Also ist

$$\mathcal{M}_B(h_A) \tag{2.240}$$

diagonal. Aber auch für die Standardbasis $C = (c_1, ..., c_n)$ von K^n:

$$\mathcal{M}_B(h_A) = T_B^C \mathcal{M}_C(h_A) T_C^B \tag{2.241}$$

$$\mathcal{M}_C(h_A) = A \tag{2.242}$$

$$T_C^B = (v_1, ..., v_n) \tag{2.243}$$

$$T_B^C = (T_C^B)^{-1} \tag{2.244}$$

$$\tag{2.245}$$

□

Frage: Wie überprüft man, ob ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K **diagonalisierbar** ist?

Idee: Man findet vielleicht (für $\mathbb{C}$ immer) ein charakteristisches Polynom für f:

$$(t - \alpha_1)^{r_1} ... (t - \alpha_k)^{r_k} \tag{2.246}$$

mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\alpha_1, ..., \alpha_k \in K, k \leq dim\, V$ und $r_1, ..., r_k \geq 1$. Wenn $k = dim\, V$, dann ist f (wie vorher) diagonalisierbar. Andernfalls braucht man für $i = 1...k$ r_i **linear unabhängige** Eigenvektoren zum Eigenwert α_i.

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K und sei $p(t)$ das charakteristische Polynom von f (d.h. $p_A(t)$ für eine Matrixdarstellung von f).
Für einen Eigenwert $\alpha \in K$ von f definieren wir:

- die **algebraische Vielfachheit** von α

$$\mu(p(t), \alpha) = max\{r \in \mathbb{N} : p(t) = (t-\alpha)^r g \text{ mit } g \in K[t]\} \tag{2.247}$$

- den **Eigenraum von f bezüglich** α

$$Eig(f; \alpha) = \{v \in V : f(v) = \alpha v\} \tag{2.248}$$

- die **geometrische Vielfachheit** von α

$$dim(Eig(f; \alpha)) \tag{2.249}$$

Bemerkungen

- $Eig(f; \alpha) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu α gehörigen Eigenvektoren von f
- Sei $(v_1, ..., v_5)$ eine Basis von $Eig(f; \alpha)$ und ergänze sie zu einer

Vorlesung vom 19.03.2012

2.4 Diagonalisierbarkeit

Zur Erinnerung Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K, und sei $p(t)$ das charakteristische Polynom von f.

Für einen Eigenwert $\alpha \in K$ von f definiert man

- die **algebraische Vielfachheit** von α

$$\mu(p(t), \alpha) = max\{n \in N : p(t) = (t - \alpha)^n g(t) \text{ mit } g(t) \in K(t)\} \tag{2.250}$$

- den **Eigenraum** von f bezüglich α:

$$Eig(f; \alpha) = \{v \in V : f(v) = \alpha v\} \tag{2.251}$$

- die **geometrische Vielfachheit** von α

$$dim(Eig(f; \alpha)) \tag{2.252}$$

Man definiert auch für $A \in Mat(n, K)$ und einen Eigenwert α von A:

$$Eig(A; \alpha) = Eig(h_A, \alpha) \tag{2.253}$$

Bemerkung (Korollar 2.4.4)
Wenn f $dim\,V$ Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit 1 hat, dann ist f diagonalisierbar.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(4; \mathbb{R}) \tag{2.254}$$

$$\begin{aligned}
p_A(t) &= \begin{vmatrix} t-5 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} && (2.255)\\
&= ((t-5)(t-1) - (-2)(2))(t-2)^2 && (2.256)\\
&= (t^2 - 6t + 9)(t-2)^2 && (2.257)\\
&= (t-3)^2 (t-2)^2 && (2.258)\\
&\mu(p_A(t); 3) = 2 && (2.259)\\
&\mu(p_A(t); 2) = 2 && (2.260)
\end{aligned}$$

- Eigenwert 2

$$(2E - A)x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \tag{2.261}$$

$$Eig(A;2) = Span\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\} \tag{2.262}$$

$$dim(Eig(A;2)) = 2 \tag{2.263}$$

- Eigenwert 3

$$(3E - A)x = 0 \tag{2.264}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\-2 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2, x_3 = x_4 = 0 \tag{2.265}$$

$$Eig(A;3) = Span\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\} \tag{2.266}$$

$$dim(Eig(A;3)) = 1 \tag{2.267}$$

Man hat 'nicht genug' linear unabhängige Eigenvektoren[4], um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu bilden, A ist **nicht** diagonalisierbar.

Beachte auch, dass

$$Eig(A;3) \cap Eig(A;2) = \{0\} \tag{2.268}$$

$$\underbrace{Eig(A;3) \oplus Eig(A;2)}_{dim3} \neq \mathbb{R}^4 \tag{2.269}$$

Zur Erinnerung Sei V ein Vektorraum über K mit Unterräumen $W_1, ..., W_K$. Wenn für

$$w_1 \in W_1, ..., w_k \in W_K \tag{2.270}$$

$$w_1 + ... + w_k = 0 \rightarrow w_1 = ... = w_k = 0 \tag{2.271}$$

$$\tag{2.272}$$

dann heisst $W_1 + ... + W_K$ die **direkte Summe** von $W_1, ...W_K$, geschrieben:

$$W_+ \oplus ... \oplus W_K \tag{2.273}$$

Äquivalente Formulierung[5]:

$$W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_K) = \{0\} \text{ für } i = 1...k \tag{2.274}$$

[4] diagonalisierbar = Wir haben eine Basis von Eigenvektoren.
[5] Lineare Algebra 1: Satz 4.3.2

Bemerkung

$$dim(W_1 \oplus ... \oplus W_K) = dim(W_1) + ... + dim(W_K) \tag{2.275}$$

Satz 2.4.6 *Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K mit charakteristischem Polynom $p(t)$ und paarweise verschiedenen Eigenwerten $\alpha_1, ..., \alpha_k \in K$. Dann sind äquivalent:*

(2) $p(t)$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h.

$$p(t) = (t - \alpha_1)^{r_1} ... (t - \alpha_k)^{r_k} \tag{2.276}$$

und $dim(Eig(f; \alpha_i)) = r_i = \mu(p(t); \alpha_i)$ für $i = 1...k$.

(3) $V = Eig(f; \alpha_1) \oplus ... \oplus Eig(f; \alpha_k)$

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2) Wenn f diagonalisierbar ist, gibt es eine Basis von Eigenvektoren von f.

$$(v_{1,1}, ..., v_{1,s_1}, v_{2,1}, ..., v_{2,s_2}, ..., v_{k,1}, ..., v_{k,s_k}) \tag{2.277}$$
$$\text{mit } v_{1,1}, ..., v_{i,s_i} \in Eig(f; \alpha_i) \text{ für } \alpha = 1...k \tag{2.278}$$

Setzen wir

$$r_i = \mu(p(t); \alpha_i) \tag{2.279}$$

so gilt für $i = 1...k$

$$s_i \leq dim(Eig(f; \alpha_i)) \leq r_i \tag{2.280}$$

und

$$r_1 + ... + r_k \leq dim\, V \tag{2.281}$$
$$= s_1 + ... + s_k \tag{2.282}$$
$$\leq r_1 + ... r_k \tag{2.283}$$
$$\Rightarrow p(t) = (t - \alpha_i)^{r_1} ... (t - \alpha_k)^{r_k} \tag{2.284}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3) Sei

$$W = Eig(f; \alpha_1) + ...1 Eig(f; \alpha_k) \tag{2.285}$$

Nach Satz 2.4.3 sind $w_1, ..., w_k$ (alle $\neq 0$) für $w_i \in Eig(f; \alpha_i)$ **linear unabhängig**. Aber dann gilt für $w_i \in Eig(f; \alpha_i)$

$$w_1 + ... + w_k = 0 \Rightarrow w_1 = ... = w_k = 0 \tag{2.286}$$
$$\Rightarrow W = Eig(f; \alpha_1) \oplus ... \oplus Eig(f; \alpha_k) \tag{2.287}$$

Aber auch

$$\begin{aligned} dim\,W &= (dim(Eig(f;\alpha_1)) + ... + dim(Eig(f;\alpha_k))) && (2.288)\\ &= \mu(p(t);\alpha_1) + ... + \mu(p(t);\alpha_k) \text{ (nach (2))} && (2.289)\\ &= dim\,V && (2.290) \end{aligned}$$

- (3) $\Rightarrow$ (1) Sei

$$B_i = (v_{i,1}, ..., v_{i,s_i}) \tag{2.291}$$

eine Basis von $Eig(f;\alpha_i)$ für $i = 1...k$. Also ist

$$(v_{1,1}, ..., v_{1,s_1}, ..., v_{k,1}, ...v_{k,s_k}) \tag{2.292}$$

eine Basis von V die aus Eigenvektoren von f besteht, d.h. f ist diagonalisierbar. □

Man erhält ein **Verfahren** für die Diagonalisierung eines Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K:

(1) Mit Hilfe einer Basis B von V und der Matrix $A = \mathcal{M}_B(f)$ berechnet man das charakteristische Polynom $p(t)$.

(2) Man sucht eine Zerlegung von $p(t)$ in Linearfaktoren.

(3) Für jeden Eigenwert α von f bestimmt man durch Lösung eines linearen Gleichungssystems eine Basis von $Eig(f;\alpha)$. Dann kann man überprüfen, ob

$$dim(Eig(f;\alpha)) = \mu(p(t);\alpha) \tag{2.293}$$

gilt. Genau dann, wenn dies für alle Eigenwerte α der Fall ist, ist f **diagonalisierbar** und man kann eine Basis von Eigenvektoren bilden.

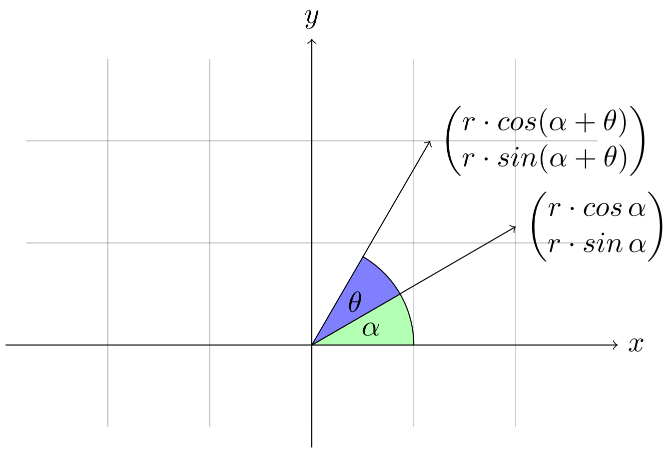
3 Orthogonale Matrizen und Drehungen

3.1 Die Orthogonale Gruppe

Wir haben schon gesehen, dass

$$\begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \in Mat(2;\mathbb{R}), \theta \in [0, 2\pi) \tag{3.1}$$

die Matrixdarstellung einer Drehung von $\mathbb{R}^2$ um den Winkel θ bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2) ist.



Man sieht auch, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sin\,\theta \\ 0 & sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

die Matrixdarstellung einer räumlichen Drehung um den Winkel θ um den Vektor

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

bezüglich der Standardbasis ist.

Frage Wie beschreibt man **alle** diese 'Drehmatrizen'?

$$A \in Mat(n; \mathbb{R}) \tag{3.4}$$

heisst **orthogonal**, wenn

$$A^t = A^{-1}, \text{ d.h. } A^t A = E \tag{3.5}$$

Beachte, dass

$$
\begin{aligned}
A^t A = E, B^t B = E \Rightarrow (AB)^t(AB) && (3.6)\\
= B^t A^t AB && (3.7)\\
= B^t EB && (3.8)\\
= E && (3.9)
\end{aligned}
$$

Also bilden die orthogonalen $n \times n$ Matrizen eine **Untergruppe** von $GL(n; \mathbb{R})$,

$$O(n; \mathbb{R}) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}) : A^t A = E\} \tag{3.10}$$

die sogenannte **orthogonale Gruppe**. Beachte nun, dass

$$
\begin{aligned}
A \in O(n; \mathbb{R}) \Rightarrow det(A^t A) = detE && (3.11)\\
\Rightarrow (det\, A)(det\, A^t) = 1 && (3.12)\\
\Rightarrow (det\, A)^2 = 1 && (3.13)\\
\Rightarrow det\, A = 1 \text{ oder } det\, A = -1 && (3.14)
\end{aligned}
$$

Auch

$$det\, A = 1, det\, B = 1 \Rightarrow det(AB) = 1 \tag{3.15}$$

Man definert die Untergruppe von $O(n; \mathbb{R})$

$$SO(n; \mathbb{R}) = \{A \in O(n; \mathbb{R}) : det\, A = 1\} \tag{3.16}$$

die **spezielle orthogonale Gruppe**. Zudem gilt

$$Mat(n; \mathbb{R}) \subseteq GL(n; \mathbb{R}) \subseteq O(n; \mathbb{R}) \subseteq SO(n; \mathbb{R}) \tag{3.17}$$

Behauptung Eine Matrix A beschreibt eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ gdw $A \in SO(2; \mathbb{R})$ oder $A \in SO(3; \mathbb{R})$.

Das **Skalarprodukt** von Spaltenvektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist wie folgt definiert:

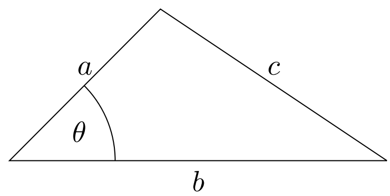
$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) = x^t y && (3.18)\\
= x_1 y_1 + ... + x_n y_n && (3.19)
\end{aligned}
$$

Die Länge $|x|$ von $x \in \mathbb{R}^n$ ist fixiert durch

$$|x|^2 = (x \cdot x) \tag{3.20}$$
$$= x_1^2 + ... + x_n^2 \tag{3.21}$$

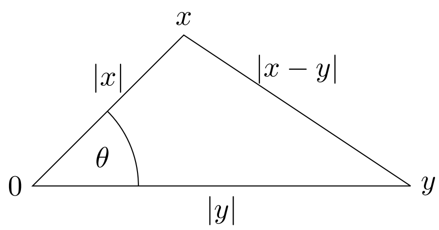
Ein Vektor mit Länge 1 heisst **Einheitsvektor**.

Für ein Dreieck in $\mathbb{R}^n$ der Form



gilt der Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\theta \tag{3.22}$$



Man erhält

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|cos\,\theta \tag{3.23}$$
$$\Rightarrow (x-y)\cdot(x-y) = (x \cdot x) + (y \cdot y) - 2(x \cdot y) \tag{3.24}$$
$$= (x \cdot x) + (y \cdot y) - 2|x||y|cos\,\theta \tag{3.25}$$
$$\Rightarrow (x-y) = |x||y|cos\,\theta \tag{3.26}$$

Beachte, dass

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (x \cdot y) = 0 \tag{3.27}$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ heissen (zueinander) **orthogonale** Vektoren, wenn

$$(x \cdot y) = 0 \tag{3.28}$$

Satz 3.1.1 *Sei $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ Dann sind äquivalent:*

(1) A ist orthogonal

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : (Ax \cdot Ay) = (x \cdot y)$

(3) Die Spalten von A sind paarweise orthogonale Einheitsvektoren.

Beweis

- $(1) \Rightarrow (2)$

$$A^tA = E \Rightarrow (x \cdot y) = x^ty \tag{3.29}$$
$$= x^tA^tAy \tag{3.30}$$
$$= (Ax)^tAy \tag{3.31}$$
$$= (Ax \cdot Ay) \tag{3.32}$$

- $(2) \Rightarrow (1)$ Nehmen wir an, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x^ty = x^tA^tAy \tag{3.33}$$

  Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x^tBy = 0 \text{ mit } B = E - A^tA \tag{3.34}$$

  Insbesondere gilt für $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$e_i^tBe_j = b_{ij} = 0 \tag{3.35}$$

  Also $B = 0$ und $A^tA = E$

- $(2) \Leftrightarrow (3)$ Sei $A = (a_1, ..., a_n)$ und beachte, dass der Eintrag der Matrix A^tA an der Stelle (i, j) $(a_i \cdot a_j)$ ist. Deshalb:

$$A^tA = E \text{ gdw} \quad (i)\,(a_i \cdot a_i) = 1 \text{ für } i = 1...n \tag{3.36}$$
$$(ii)\,(a_i \cdot a_j) = 0 \text{ für } i \neq j \tag{3.37}$$
$$\text{gdw} \quad (i)\,a_i \text{ ist ein Einheitsvektor } i = 1...n \tag{3.38}$$
$$(ii)\,a_i, a_j (i \neq j) \text{ sind orthogonal} \tag{3.39}$$

$\square$

Vorlesung vom 23.03.2012

Zur Erinnerung: Wir betrachten

- **die orthogonale Gruppe**

$$O(n;\mathbb{R}) = \{A \in GL(n;\mathbb{R}) : A^t A = E\} \tag{3.40}$$

- **die spezielle orthogonale Gruppe**

$$SO(n;\mathbb{R}) = \{A \in O(n;\mathbb{R}) : det\,A = 1\} \tag{3.41}$$

Beispiel

$$A_\theta = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

Eine Drehung von $\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{matrix} A_\theta^t A_\theta = E \\ det(A_\theta) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_\theta \in SO(2;\mathbb{R}) \tag{3.43}$$

Behauptung Eine Matrix A beschreibt eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ gdw $A \in SO(2;\mathbb{R})$ oder $A \in SO(3;\mathbb{R})$.

Bemerkung zu Satz 3.1.1 Für $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ sind äquivalent:

(1) A ist **orthogonal**

(2) $((Ax) \cdot (Ay)) = (x \cdot y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(3) Die Spalten von A sind paarweise orthogonale Einheitsvektoren, d.h.

$$\text{für } A = (a_1, ..., a_n), a_i \cdot a_i = 1 \tag{3.44}$$

$$a_i \cdot a_j = 0, i \neq j \tag{3.45}$$

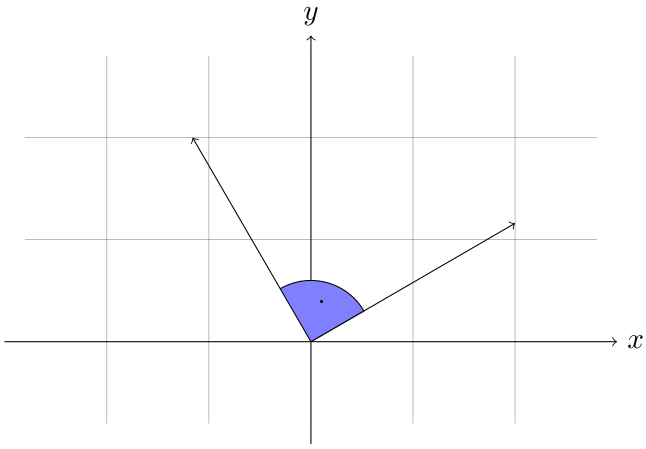
Definition Eine **orthonormale Basis** von $\mathbb{R}^n$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren besteht (d.h. Spalten einer orthogonalen Matrix)

Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \tag{3.46}$$

ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$, aber nicht:

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{3.47}$$



3.2 Euklidische Bewegungen

Eine (euklidische) Bewegung oder Isometrie von $\mathbb{R}^n$ ist eine 'abstandstreue' Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \tag{3.48}$$

Beispiel Für jedes

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{3.49}$$

ist die Translation $t_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n + \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

eine Bewegung, da

$$|t_a(x) - t_a(y)| = | \begin{pmatrix} x_1 + \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n + \alpha_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 + \alpha_1 \\ \vdots \\ y_n + \alpha_n \end{pmatrix} | = |x - y| \tag{3.51}$$

Bemerkung Die Zusammensetzung von zwei Bewegungen und die Umkehrabbildung einer Bewegung sind auch Bewegungen. Also bilden die euklidischen Bewegungen von $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe

$$B(n; \mathbb{R}) \tag{3.52}$$

die **Bewegungsgruppe** oder **Isometriegruppe**.

Satz 3.2.1 *Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

(1) f ist eine euklidische Bewegung, die den Nullpunkt fest lässt, d.h. $f(0) = 0$.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\underbrace{(f(x)f(y))}_{Skalar} = \underbrace{(x \cdot y)}_{Skalar} \tag{3.53}$$

(3) f ist durch Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix gegeben.

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2) Nehmen wir an, dass f eine Bewegung mit $f(0) = 0$ ist. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$(f(x) - f(y)) \cdot (f(x) - f(y)) = ((x - y)(x - y)) \tag{3.54}$$

Insbesondere gilt für $y = 0$

$$f(y) = 0 \tag{3.55}$$
$$(f(x) \cdot f(x)) = (x \cdot x) \tag{3.56}$$

Wir erhalten

$$(f(x) \cdot f(x)) + (f(y) \cdot f(y)) - 2(f(x) \cdot f(y)) = (x \cdot x) + (y \cdot y) - 2(x \cdot y) \tag{3.57}$$

und deshalb

$$(f(x) \cdot f(y)) = (x \cdot y) \tag{3.58}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3) Zuerst bemerken wir, dass für eine Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

(i) $g(e_i) = e_i$ für $1, ..., n$ und $(g(x) \cdot g(y)) = (x \cdot y)$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{3.59}$$

(ii) g ist die identische Abbildung $g(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}^n$

Nehmen wir jetzt an, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$(f(x) \cdot f(y)) = (x \cdot y) \tag{3.60}$$

Dann ist $(f(e_1), ..., f(e_n))$ eine **Orthonormalbasis**, da

$$(f(e_i) \cdot f(e_i)) = (e_i \cdot e_i) = 1 \tag{3.61}$$
$$(f(e_i) \cdot f(e_j)) = (e_i \cdot e_j) = 0, i \neq j \tag{3.62}$$

Also nach Satz 3.1.1:

$$A = (f(e_1), ..., f(e_n)) \in O(n; \mathbb{R}) \tag{3.63}$$

Zu zeigen: $f(x) = Ax$ für $x \in R^n$.
Wir haben $A^{-1} \in O(n; \mathbb{R})$ und nach Satz 3.1.1

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n (A^{-1}x \cdot A^{-1}y) = (x \cdot y) \tag{3.64}$$

Aber dann auch $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$((h_{A^{-1}})(x) \cdot (h_{A^{-1}} \circ f)(x)) = (x \cdot y) \tag{3.65}$$

und für $i = 1...n$

$$(h_{A^{-1}} \circ f)(e_i) = A^{-1}(f(e_i)) = e_i \tag{3.66}$$

Daraus folgt, dass (nach der vorigen Bemerkung) $h_{A^{-1}} \circ f$ die identische Abbildung ist und $f(x) = Ax \forall x \in \mathbb{R}^n$.

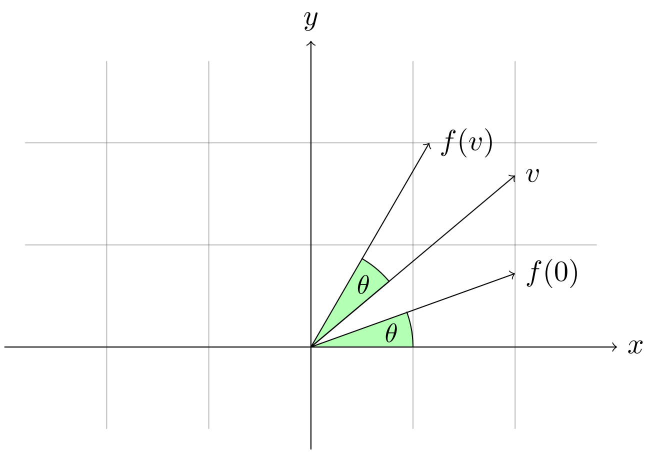
- (3) $\Rightarrow$ (1) Ist f ein Endomorphismus dessen Matrix A orthogonal ist, dann gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x - y)| && (3.67)\\ &= |A(x - y)| && (3.68)\\ &= \sqrt{A(x - y) \cdot A(x - y)} && (3.69)\\ &= \sqrt{(x - y)(x - y)} \text{ (Satz 3.1.1)} && (3.70)\\ &= |x - y| && (3.71) \end{aligned}$$

Also ist eine euklidische Bewegung $f(0) = A \cdot 0 = 0$ □

Korollar 3.2.2 *Eine euklidische Bewegung f, die den Nullpunkt fest lässt, ist ein* ***Endomorphismus****. Man nennt f einen orthogonalen Endomorphismus.*

Frage Wie bildet/beschreibt man eine euklidische Bewegung?



Satz 3.2.3 *Jede euklidische Bewegung f ist die Zusammensetzung eines orthogonalen Endomorphismus und einer Translation, d.h.*

$$f(x) = Ax + b \tag{3.72}$$

für ein $A \in O(n;\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Beweis Sei $b = f(0)$. Dann gilt:

$$(t_{-b} \oplus f)(0) = t_{-b}(f(0)) = 0 \tag{3.73}$$

Nach Satz 3.2.1 gibt es $A \in O(n;\mathbb{R})$ mit $(t_{-b} \oplus f)(x) = Ax$ Also

$$f(x) = Ax + b \tag{3.74}$$

□

Lemma 3.2.4 *Jedes $A \in SO(3;\mathbb{R})$ hat einen Eigenwert 1.*

Beweis Wir brauchen $det(A - E) = 0$. Beachte dass

$$\begin{aligned}
det(A - E) &= det\, A^t \cdot det(A - E) = det(A^t(A - E)) && (3.75)\\
&= det(A^tA - A^tE) && (3.76)\\
&= det(E - A^t) && (3.77)\\
&= det(E - A)^t && (3.78)\\
&= det(E - A) && (3.79)\\
&= det((-1)A - E) && (3.80)\\
&= -det(A - E) && (3.81)\\
&= 0 && (3.82)
\end{aligned}$$

Satz 3.2.5 *Eine Matrix A beschreibt eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ gdw $A \in SO(2;\mathbb{R})$ oder $A \in SO(3;\mathbb{R})$.*

Beweis

- $\Rightarrow$ Sei d eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Dann ist d eine euklidische Bewegung und nach Satz 3.2.1 gibt es $A \in O(n;\mathbb{R})$ (mit $n = 2$ oder $n = 3$) mit $d(x) = Ax$.
  Weiter gilt $det\, A = 1$, weil $det\, A$ stetig vom Drehwinkel abhängt und für den Drehwinkel 0 (identische Abbildung) $det\, A = 1$. Also $A \in SO(n;\mathbb{R})$.

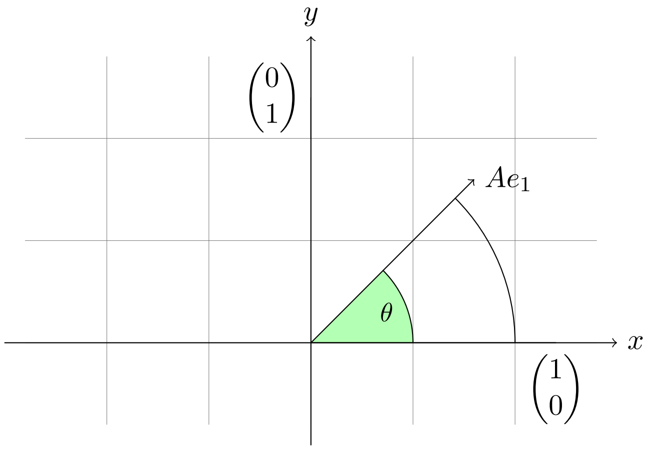
- $\Leftarrow$ Sei nun $A \in SO(2;\mathbb{R})$
  Zu zeigen:

$$A = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \text{ für ein } \theta \in [0, 2\pi) \tag{3.83}$$

Wir haben

$$A = (Ae_1, Ae_2) \in SO(2;\mathbb{R}) \tag{3.84}$$

und Ae_1, Ae_2 sind orthogonale Einheitsvektoren.



Es gibt also eine Drehung mit Matrixdarstellung $D \in SO(2;\mathbb{R})$, so dass $De_1 = Ae_1$. Wir zeigen $D = A$.
Wir haben

$$(D^{-1}A)e_1 = e_1 \text{ und } D^{-1}A \in SO(2;\mathbb{R}) \tag{3.85}$$

Also

$$D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \tag{3.87}$$

$$| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} | = 1 \tag{3.88}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = 1 \tag{3.89}$$

Daraus folgt, dass $\alpha = 0, \beta = 1$ und $D^{-1}A = E$, d.h. $D = A$.

Vorlesung vom 26.03.2012

3.2 Euklidische Bewegungen

Satz 3.2.5
Eine Matrix A beschreibt eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ gdw $A \in SO(2;\mathbb{R})$ oder $A \in SO(3;\mathbb{R})$.

Beweis Zu zeigen:

$$A \in SO(3;\mathbb{R}) \Rightarrow A \text{ beschreibt eine Drehung von } \mathbb{R}^3 \tag{3.90}$$

Zur Erinnerung...
Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst **euklidische Bewegung** (**Isometrie**), wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|f(y) \cdot f(y)| = |x - y| \tag{3.91}$$

Wir haben gesehen, dass **immer**

$$f(x) = Ax + b(x \in \mathbb{R}^n) \tag{3.92}$$

für ein $A \in O(n;\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$ (Satz 3.2.3).

Beispiel Betrachte

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 & -20 \\ -20 & 15 & 0 \\ 12 & 16 & 15 \end{pmatrix} \in Mat(3;\mathbb{R}) \tag{3.93}$$

und beachte, dass

$$A^t A = E, det\, A = 1 \tag{3.94}$$

d.h. $A \in SO(3;\mathbb{R})$.

Man berechnet

$$\begin{aligned} p_A(t) &= det(tE - A) && (3.95)\\ &= t^3 - \frac{39t^2}{25} + \frac{39}{25} - 1 && (3.96)\\ &= (t-1)(t^2 - \frac{14}{25}t + 1) && (3.97) \end{aligned}$$

d.h. A hat einen **Eigenwert 1** (eigentlich wie **jede** Matrix in $SO(3;\mathbb{R})$, Lemma 3.2.4).

Man erhält

$$A\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \tag{3.98}$$

$$Eig(A;1) = Span\{\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\} \tag{3.99}$$

die sogenannte 'Drehachse' von A. Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \text{ und } (v_1, v_2, v_3) \tag{3.100}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$PAP^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\\hline 0 & B & \\ 0 & & \end{array}\right) \tag{3.101}$$

mit

$$P^{-1} = (v_1, v_2, v_3) \in O(3;\mathbb{R}) \tag{3.102}$$
$$P \in O(3;\mathbb{R}) \tag{3.103}$$
$$det\,PAP^{-1} = det\,A = 1 \tag{3.104}$$
$$\Rightarrow PAP^{-1} \in SO(3;\mathbb{R}) \tag{3.105}$$
$$\Rightarrow B \in SO(2;\mathbb{R}) \tag{3.106}$$

Daraus folgt, dass für ein $\theta \in [0, 2\pi)$

$$B = \begin{pmatrix}cos\,\theta & -sin\,\theta\\ sin\,\theta & cos\,\theta\end{pmatrix} \tag{3.107}$$

d.h. h_A wirkt auf der Ebene $Span\{v_2, v_3\}$ senkrecht zu v_1, wie eine Drehung um den Winkel θ.
Beachte auch[1], dass

$$Spur\,A = Spur(PAP^{-1}) \tag{3.108}$$
$$\Rightarrow \frac{39}{25} = 1 + 2cos\,\theta \tag{3.109}$$
$$\Rightarrow \theta = cos^{-1}\frac{2}{25} \tag{3.110}$$

Sei $A \in SO(3;\mathbb{R})$. Wir brauchen

[1] $Spur$ = Summe der Diagonaleinträge

(i) h_A ist eine euklidische Bewegung, die den Nullpunkt fest lässt.

(ii) h_A lässt einen Vektor $v \neq 0$ fest.

(iii) h_A wirkt auf der Ebene senkrecht zu v wie eine Drehung.

Beweis

- (i): Gilt nach Satz 3.2.1.
- (ii) + (iii): Nach Lemma 3.2.4 gibt es $0 \neq v_1 \in \mathbb{R}^3$ mit $h_A(v_1) = Av_1 = v_1$. Wir können auch annehmen, dass v_1 ein Einheitsvektor ist und $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ finden, so dass

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) \tag{3.111}$$

eine **Orthonormalbasis** ist (die Ebene $Span\{v_2, v_3\}$ ist zu v_1 senkrecht).
Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_B(h_A) = PAP^{-1}\text{mit } P^{-1} = (v_1, v_2, v_3) \in O(3;\mathbb{R}) \qquad (3.112)\\ P \in O(3;\mathbb{R}) \qquad (3.113)\\ det(\mathcal{M}_B(h_A)) = det\, A = 1 \qquad (3.114) \end{aligned}$$

Also $\mathcal{M}_B(h_A) = PAP^{-1} \in SO(3;\mathbb{R})$ und hat die Formel

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & \\ 0 & & \end{array}\right) \tag{3.115}$$

Man beachte, dass

$$B^t B = E, det\, B = 1 \tag{3.116}$$

d.h. $B \in SO(2;\mathbb{R})$ ist die Matrixdarstellung einer Drehung der Ebene $Span\{v_2, v_3\}$.
□

Bemerkungen

- Jedes $A \in SO(3;\mathbb{R})$ (die eine Drehung von $\mathbb{R}$ beschreibt) ist ein Produkt von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta_1 & -sin\,\theta_1 \\ 0 & sin\,\theta_1 & cos\,\theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\,\theta_2 & 0 & -sin\,\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\,\theta_2 & 0 & cos\,\theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\,\theta_3 & -sin\,\theta_3 & 0 \\ sin\,\theta_3 & cos\,\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.117}$$

- $A \in O(2;\mathbb{R})$ oder $A \in O(3;\mathbb{R})$ mit $det\, A = -1$ beschreibt eine Spiegelung oder die Komposition von Spiegelungen und Drehungen.

- Man nennt $SO(2;\mathbb{R})$ und $SO(3;\mathbb{R})$ **Drehgruppen**. Für $n > 3$ ist die Situation komplizierter, z.B.

$$\begin{pmatrix} cos\,\theta_1 & -sin\,\theta_1 & 0 & 0 \\ sin\,\theta_1 & cos\,\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\,\theta_2 & -sin\,\theta_2 \\ 0 & 0 & sin\,\theta_2 & cos\,\theta_2 \end{pmatrix} \in SO(4;\mathbb{R}) \tag{3.118}$$

  ist die Zusammensetzung einer Drehung der ersten beiden Koordinaten um den Winkel θ_1 und einer Drehung der letzten beiden Koordinaten um den Winkel θ_2, aber keine Drehung von $\mathbb{R}^4$.

4 Lösung von Differentialgleichungen

4.1 Systeme von Differentialgleichungen

Betrachte die lineare Differentialgleichung (erster Ordung):

$$\frac{dx}{dt} = ax(a \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

Zur Erinnerung:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \tag{4.2}$$

Die Lösungen haben die Form

$$\boxed{x(t) = ce^{at}(c \in \mathbb{R})} \tag{4.3}$$

Beachte, dass für $x'(t) = ax(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{-at}x(t)\right) &= -ae^{-at}x(t) + e^{-at}x'(t) && (4.4)\\ &= 0 && (4.5)\\ &\Rightarrow e^{-at}x(t) = c \in \mathbb{R} \text{ (konstant)} && (4.6)\\ &\Rightarrow x(t) = ce^{at} && (4.7) \end{aligned}$$

Frage Wie löst man ein **System** von **Differentialgleichungen** der Form

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \alpha_{11}x_1(t) + \quad ... + \alpha_{1n}x_n(t) \\ &\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \star \\ x_n'(t) &= \alpha_{n1}x_1(t) + \quad ... + \alpha_{nn}x_n(t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit unbekannten Funktionen $x_i(t)$ über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)?

Wir verwenden

- **vektorwertige Funktionen**

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

- **matrixwertige Funktionen**

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

mit Operationen aus der Analysis komponentenweise definiert:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$\text{wobei } \alpha_i = \lim_{t \to t_0} x_i(t) \tag{4.12}$$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \tag{4.14}$$

$$\frac{dA}{dt} = A'(t) = \begin{pmatrix} a_{11}'(t) & \cdots & a_{1n}'(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}'(t) & \cdots & a_{nn}'(t) \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Wir schreiben statt $\star$

$$\frac{dx}{dt} = Ax \text{ mit } A \in Mat(n; \mathbb{R}) \text{ oder } Mat(n; \mathbb{C}) \tag{4.16}$$

$$(\text{oder: } x'(t) = Ax(t)) \tag{4.17}$$

Beispiele

(i)

$$x_1'(t) = 5x_1(t) \tag{4.18}$$

$$x_2'(t) = -3x_2(t) \tag{4.19}$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) \tag{4.20}$$

Lösungen

$$x_1(t) = c_1 e^{5t} \tag{4.21}$$

$$x_2(t) = c_2 e^{-3t} \tag{4.22}$$

$$\tag{4.23}$$

(ii)

$$x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) \tag{4.24}$$
$$x_2'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) \tag{4.25}$$
$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$
$$P_A(r) = \begin{vmatrix} r-3 & 1 \\ 2 & r-2 \end{vmatrix} \tag{4.27}$$
$$= (r-3)(r-2) - (1)(2) \tag{4.28}$$
$$= r^2 - 5r + 4 \tag{4.29}$$
$$= (r-4)(r-1) \tag{4.30}$$
$$Eig(A;4) = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} \tag{4.31}$$
$$Eig(A;1) = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\} \tag{4.32}$$

Beachte, dass

$$x(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \end{pmatrix} \tag{4.33}$$
$$\text{und } x(t) = e^{1t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2e^{t} \end{pmatrix} \tag{4.34}$$
$$\tag{4.35}$$

sind Lösungen und deshalb auch alle Linearkombinationen:

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{4t} + c_2e^t \\ -c_1e^{4t} + 2c_2e^t \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

Satz 4.1.1 *Sei $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ und $P \in GL(n;\mathbb{R})$, so dass PAP^{-1} Diagonalform mit Diagonaleinträgen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ hat. Die allgemeine Lösung des Systems*

$$\boxed{\tfrac{dx}{dt} = Ax} \tag{4.37}$$

ist dann

$$x = P^{-1}y \tag{4.38}$$

wobei

$$y_i = c_ie^{\alpha_i t} \text{ für } i = 1...n (c_i \text{ Konstanten}) \tag{4.39}$$

Beweis Man setzt für beliebiges

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

$$y(t) = Px(t) \tag{4.41}$$

$$\text{d.h. } x(t) = P^{-1}y(t) \tag{4.42}$$

$$\text{und } \frac{dx}{dt} = P^{-1}\frac{dy}{dt} \tag{4.43}$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{dx}{dt} = Ax \Leftrightarrow P^{-1}\frac{dy}{dt} = AP^{-1}y(t) \tag{4.44}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{PAP^{-1}}_{\text{diagonal}}y(t) \tag{4.45}$$

$$\Leftrightarrow y_i = c_i e^{\alpha_i t} \text{ für Konstanten } c_i, i = 1...n \tag{4.46}$$

□

Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = Ax \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

$$p_A(r) = r^2 + 1 \tag{4.48}$$

Eigenwerte: $i, -i$

$$Eig(A; i) = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}\} \tag{4.49}$$

$$Eig(A; -i) = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}\} \tag{4.50}$$

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ mit } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{it} \\ c_2 e^{-it} \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} \\ (2-i)c_1 e^{it} + (2+i)c_2 e^{-it} \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

Wir haben **alle** (**komplexe**) Lösungen bestimmt, aber oft braucht man nur die **reellen Lösungen**. Man verwendet

$$\boxed{e^{iv} = cos\, v + i \cdot sin\, v} \tag{4.54}$$

und beachte, dass

$$x(t) = u(t) + i \cdot v(t) \tag{4.55}$$
$$\tag{4.56}$$

$(u(t), v(t)$ sind reelle Funktionen)
eine Lösung von $\frac{dx}{dt} = Ax$ ist gdw $u(t)$ und $v(t)$ Lösungen sind.

Wir haben hier

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{it} \\ (2-i)e^{it} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-it} \\ (2+i)e^{-it} \end{pmatrix} \tag{4.57}$$
$$=(c_1 + c_2) \begin{pmatrix} cos\, t \\ 2cos\, t + sin\, t \end{pmatrix} + (c_1 - c_2) \begin{pmatrix} sin\, t \\ 2sin\, t - cos\, t \end{pmatrix} i \tag{4.58}$$

Reelle Lösungen sind

$$k_1 \begin{pmatrix} cos\, t \\ 2cos\, t + sin\, t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} sin\, t \\ 2sin\, t - cos\, t \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

Vorlesung vom 02.04.2012

4.2 Die Exponentialbildung von Matrizen

Zur Erinnerung (Satz 4.1.1)
Sei $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ und $P \in GL(n;\mathbb{R})$ mit

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

Die allgemeine Lösung des Systems

$$\alpha_1 t \frac{dx}{dt} = Ax \tag{4.61}$$

ist dann

$$x = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\alpha_n t} \end{pmatrix} \; c_1, ..., c_n \text{ Konstanten} \tag{4.62}$$

oder

$$Span\{P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\alpha_n t} \end{pmatrix}\} \tag{4.63}$$

$$= \text{Span der } \textbf{Spalten} \text{ von} P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n t} \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

Frage Wie löst man das $\frac{dx}{dt} = Ax$, wenn A nicht diagonalisierbar ist?

Beispiele

(i)

$$x_1'(t) = 20x_1(t) - 30x_2(t) \tag{4.65}$$
$$x_2'(t) = 9x_1(t) - 13x_2(t) \tag{4.66}$$
$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ 9 & -13 \end{pmatrix} \tag{4.67}$$
$$p_A(r) = \begin{vmatrix} r-20 & 30 \\ -9 & r+13 \end{vmatrix} \tag{4.68}$$
$$= (r-20)(r+13) - (-9)(30) \tag{4.69}$$
$$= r^2 - 7r + 10 = (r-5)(r-2) \tag{4.70}$$

Eigenwerte: 5, 2

$$Eig(A;5) = Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{4.71}$$

$$Eig(A;2) = Span\{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\} \tag{4.72}$$

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.73}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

$$= \begin{pmatrix} 2c_1 e^{5t} + 5c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} + 3c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

$$\text{oder } Span\{\begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}\} \tag{4.76}$$

(ii)

$$x_1'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \tag{4.77}$$

$$x_2'(t) = 3x_2(t) \tag{4.78}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.79}$$

Nicht diagonalisierbar.
Beachte jedoch, dass

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

Lösungen sind und deshalb auch alle Linearkombinationen

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

$$\boxed{e^A} \tag{4.82}$$

Man definiert die gewöhnliche Exponentialfunktion $e^x (x \in \mathbb{C})$ wie folgt:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \tag{4.83}$$

Für $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ definiert man analog:

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ... \in Mat(n;\mathbb{C}) \tag{4.84}$$

Behauptung (Beweis später)
Die Exponentialfunktion e^A konvergiert für jedes $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ absolut.

Bemerkungen

(1) Im Allgemeinen ist es nicht einfach die Einträge der Matrix e^A zu Berechnen, aber für **Diagonalmatrizen** gilt:

$$e^{\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix} \tag{4.85}$$

$$+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^2\end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix}\alpha_1^3 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^3\end{pmatrix} + ... \tag{4.86}$$

$$= \begin{pmatrix}1+\alpha_1+\frac{\alpha_1^2}{2!}+\frac{\alpha_1^3}{3!}+... & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1+\alpha_n+\frac{\alpha_n^2}{2!}+\frac{\alpha_n^3}{3!}+...\end{pmatrix} \tag{4.87}$$

$$= \begin{pmatrix}e^{\alpha_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n}\end{pmatrix} \tag{4.88}$$

(2) Betrachte nun, dass für $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ und $P \in GL(n;\mathbb{C})$:

$$e^{PAP^{-1}} = E + (PAP^{-1}) + \frac{1}{2!}(PAP^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(PAP^{-1})^3 + ... \tag{4.89}$$

$$= P(E)P^{-1} + P(A)P^{-1} + P(\frac{1}{2!}A^2)P^{-1} + P(\frac{1}{3!}A^3)P^{-1} + ... \tag{4.90}$$

$$= Pe^AP^{-1} \tag{4.91}$$

Im Besonderen, wenn

$$D = PAP^{-1} \tag{4.92}$$

diagonal ist, berechnet man relativ leicht

$$e^A = P^{-1}e^DP \tag{4.93}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ 9 & -13 \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned} e^A &= P^{-1} e^{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} P && (4.96) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} && (4.97) \\ &= \begin{pmatrix} 6e^5 - 5e^2 & -10e^5 + 10e^2 \\ 3e^5 - 3e^2 & -5e^5 + 6e^2 \end{pmatrix} && (4.98) \end{aligned}$$

Behauptung (Beweis später)
Sei $A \in Mat(n; \mathbb{C})$. Die Spalten von e^{tA} bilden eine Basis für den Vektorraum der Lösungen von

$$\boxed{\tfrac{dx}{dt} = Ax} \tag{4.99}$$

Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ 9 & -13 \end{pmatrix} x \tag{4.100}$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P^{-1} e^{\begin{pmatrix} 5t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}} P && (4.101) \\ &= \begin{pmatrix} 6e^{5t} - 5e^{2t} & -10e^{5t} + 10e^{2t} \\ 3e^{5t} - 3e^{2t} & -5e^{5t} + 6e^{2t} \end{pmatrix} && (4.102) \end{aligned}$$

Die Lösungen sind in

$$Span\{\begin{pmatrix} 6e^{5t} - 5e^{2t} \\ 3e^{5t} - 3e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10e^{5t} + 10e^{2t} \\ -5e^{5t} + 6e^{2t} \end{pmatrix}\} \tag{4.103}$$

Verglichen mit

$$Span\{\begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}\} \tag{4.104}$$

Sei $A \in Mat(n; \mathbb{C})$. Wir schreiben $(A)_{ij}$ für den Eintrag an der Stelle (i, j) und definieren die **Norm**:

$$\begin{aligned} ||A|| &= max\{|(A)_{ij}| : | \leq i, j \leq n|\} && (4.105) \\ &= (|(A)_{ij}| \leq ||A|| \, i, j) && (4.106) \end{aligned}$$

Lemma 4.2.1 *Für $A, B \in Mat(n;\mathbb{C})$*

(i) $||AB|| \leq n||A||\,||B||$

(ii) $||A^k|| \leq n^{k-1}||A||^k$ *für alle* $k > 0$.

Beweis

(i) Beachte, dass

$$\begin{aligned} |(AB)_{ij}| &= |\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(B)_{rj}| && (4.107)\\ &\leq \sum_{r=1}^{n}|(A)_{ir}|\,|(B)_{rj}| && (4.108)\\ &\leq n||A||\,||B|| && (4.109)\end{aligned}$$

(ii) folgt direkt aus (i) □

Satz 4.2.2 *Die Exponentialreihe*

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ... \tag{4.110}$$

konvergiert für alle $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ absolut.

Beweis
Wir zeigen, dass die Absolutbeträge der Einträge $(e^A)_{ij}$ jeweils eine **beschränkte** und daher konvergente Reihe bilden:

$$\begin{aligned} |(e^A)_{ij}| &\leq |(E)_{ij}| + |(A)_{ij}| + |\frac{1}{2!}(A)_{ij}| + |\frac{1}{3!}(A^3)_{ij}| + ... && (4.111)\\ &\leq 1 + ||A|| + \frac{1}{2!}n||A||^2 + \frac{1}{3!}n^2||A||^3 + ... \text{ (Lemma 4.2.1)} && (4.112)\\ &= 1 + \frac{1}{n}(n||A|| + \frac{1}{2!}(n||A||)^2 + \frac{1}{3!}(n||A||)^3 + ...) && (4.113)\\ &= 1 + \frac{1}{n}(e^{n||A||} - 1) && (4.114)\end{aligned}$$

□

Satz 4.2.3 *Die Zuordnung $t \mapsto e^{tA}$ definiert eine differenzierbare Funktion Funktion von t, und ihre Ableitung ist Ae^{tA}.*

Beweis

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \tag{4.115}$$

Es genügt zu zeigen, dass für

$$R(t,h) = \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} \tag{4.116}$$

folgendes gilt:

$$\lim_{h \mapsto 0} R(t,h) = 0 \tag{4.117}$$

Beachte, dass

$$R(t,h) = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((t-h)^k A^k - t^k A^k)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{(k-1)} A^k \tag{4.118}$$

$$= \sum_{k=2}^{infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{h}((t+h)^k - t^k - kht^{k-1})A^k \tag{4.119}$$

Betrachte auch die Taylorentwicklung fer Funktion $f(x) = x^k$ um t in zwei Termen mit Restglied:

$$(t+h)^k = f(t+h) \tag{4.120}$$

$$= f(t) + hf'(t) + h^2 f''(t + \theta_k h) \text{ mit } \theta_k \in (0,1] \tag{4.121}$$

$$= t^k + hkt^{k-1} + h^2 k(k-1)(t + \theta_k h)^{k-2} \tag{4.122}$$

Man erhält

$$R(t,h) = h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!}(t + \theta_k h)^{k-2} A^k \tag{4.123}$$

$$|R(t,h)_{ij}| \leq |h| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(|t| + |h|)^k ||A^{k+2}|| \tag{4.124}$$

$$\leq ||h|| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(|t| + |h|)^k n^{k+1} ||A||^{k+2} \text{ (nach Lemma 4.2.1)} \tag{4.125}$$

$$= |h|n||A||^2 e^{|t|+|h|n||A||} \tag{4.126}$$

Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0} R(t,h) = 0 \tag{4.127}$$

□

$A, B \in Mat(n;\mathbb{C})$ heissen **vertauschbar**, wenn $AB = BA$.
In diesem Fall gilt

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \text{ (Beweis später)} \tag{4.128}$$

Daraus folgt, dass für jedes

$$A \in Mat(n;\mathbb{C}) \tag{4.129}$$

gilt:

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} \text{ (da } A(-1) = (-A)A) \tag{4.130}$$

$$= e^0 \tag{4.131}$$

$$= E \tag{4.132}$$

d.h. e^A ist invertierbar mit Inverse e^{-A}.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.133}$$

Beachte, dass

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.134}$$

und deshalb

$$e^{tA} = e^{\begin{pmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \tag{4.135}$$

$$= e^{\begin{pmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 3t \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \tag{4.136}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.137}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \tag{4.138}$$

Die Lösungen des Systems $\frac{dx}{dt}$ sind in

$$Span\{\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}\} \tag{4.139}$$

Vorlesung vom 16.04.2012

Zur Erinnerung: Für $A \in Mat(n;\mathbb{C})$:

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot A^i = E + A + \frac{A^2}{2!} + ... \tag{4.140}$$

Diese Reihe konvergiert absolut.
Siehe an dieser Stelle den Satz 4.2.6.

Beispiel

(i)

$$x'(t) = A \cdot x(t) \text{ mit} \tag{4.141}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(2;\mathbb{C}) \tag{4.142}$$

$$\Rightarrow x'(t) = -3x_1(t) \tag{4.143}$$

$$x_2'(t) = 2x_2(t) \tag{4.144}$$

$$e^{tA} = e^{\begin{pmatrix} -3t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \tag{4.145}$$

Lösungen:

$$Span\{\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}\} \tag{4.146}$$

das heisst

$$x_1(t) = \alpha \cdot e^{-3t} \tag{4.147}$$

$$x_2(t) = \beta \cdot e^{2t}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{4.148}$$

(ii)

$$x'(t) = B \cdot x(t) \text{ mit} \tag{4.149}$$

$$B = \begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix}, PBP^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit } P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.150}$$

$$e^{tB} = e^{P^{-1}\begin{pmatrix} 3t & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}P} \tag{4.151}$$

$$= P^{-1} \cdot e^{\begin{pmatrix} -3t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}} \cdot P = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P \tag{4.152}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{-3t} - 3e^{2t} & -2e^{-3t} - e^{2t} \\ 6e^{-3t} - 6e^{2t} & -3e^{-3t} + 4e^{2t} \end{pmatrix} \tag{4.153}$$

Lösungen:

$$Span\{\begin{pmatrix} 4e^{-3t} - 3e^{2t} \\ 6e^{-3t} - 6e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2e^{-3t} - e^{2t} \\ -3e^{-3t} + 4e^{2t} \end{pmatrix}\} \tag{4.154}$$

Zur Erinnerung (n=1):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = a \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-at} \cdot x(t)\right) \quad & (4.155)\\ = -a \cdot e^{-at} \cdot x(t) + e^{-at} \cdot a \cdot x(t) \quad & (4.156)\\ = 0 \quad & (4.157)\\ \Leftrightarrow e^{-at} x(t) = c \in \mathbb{C} \quad & (4.158)\\ \Leftrightarrow x(t) = c \cdot e^{at} \quad & (4.159) \end{aligned}$$

Lemma 4.2.4 *Seien $A(t)$ und $B(t)$ dfb. $m \times n$ und $n \times p$ matrixwertige Funktionen von t. Dann ist $A(t) \cdot B(t)$ eine dfb. $m \times p$ matrixwertige Funktion mit*

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt} \tag{4.160}$$

Beweis Aufgabe.

$A, B \in Mat(n; \mathbb{C})$ heissen **vertauschbar**, wenn $AB = BA$. Zum Beispiel: A und e^{tA} sind vertauschbar.

Lemma 4.2.5 *Wenn $A, B \in Mat(n; \mathbb{C})$ vertauschbar sind, gilt $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$*

Beweis Beachte zuerst, dass für $A \in Mat(n; \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{tA} \cdot e^{-tA}\right) = A \cdot e^{tA} \cdot e^{-tA} - e^{tA} \cdot A \cdot e^{-tA} \text{ (Lemma 4.2.4)} \quad & (4.161)\\ = 0 \quad & (4.162) \end{aligned}$$

Also ist $e^{tA} \cdot e^{-tA}$ **konstant**. Aber auch $e^{0A} \cdot e^{-0A} = e^0 = E(t = 0)$ und deshalb $e^{tA} \cdot e^{-tA} = E$ d.h. e^{-tA} ist die Inferse von e^{tA}.

Beachte nun, dass für $A, B \in Mat(n; \mathbb{C})$ vertauschbar.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{t(A+B)} \cdot e^{-tB} \cdot e^{-tA}\right) \text{ (Lemma 4.2.4)} \quad & (4.163)\\ = (A+B) \cdot e^{t(A+B)} \cdot e^{-tB} \cdot e^{-tA} \cdot e^{t(A+B)}\left(-B \cdot e^{-tB} \cdot e^{-tA} - e^{-tB} \cdot A \cdot e^{-tA}\right) \quad & (4.164) \end{aligned}$$

Aber da A, B vertauschbar sind, gilt dies auch für A, e^{tB}.
Man erhält

$$\frac{d}{dt}\left(e^{(A+B)} \cdot e^{-tB} \cdot e^{-tA}\right) = 0 \tag{4.165}$$

das heisst, die Funktion ist konstant.
Daraus folgt:

$$e^{t(A+B)} \cdot e^{-tB} \cdot e^{-tA} = E \tag{4.166}$$

und

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB} \tag{4.167}$$

$$e^{(A+B)} = e^{A} \cdot e^{B} \; (t = 1) \tag{4.168}$$

□

Satz 4.2.6 *Sei $A \in Mat(n;\mathbb{C})$. Die Spalten von e^{tA} bilden eine Basis für den Vektorraum der Lösungen von $\frac{dx}{dt} = Ax$.*

Beweis Sei $x(t)$ eine beliebige Lösung von $\frac{dx}{dt} = Ax$. Dann gilt nach Lemma 4.2.4:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA} \cdot x(t)\right) = -Ae^{-tA} \cdot x(t) + e^{-tA} \cdot A \cdot x(t) \tag{4.169}$$

Aber A und e^{tA} sind vertauschbar und deshalb

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA} \cdot x(t)\right) = 0 \tag{4.170}$$

Daraus folgt, dass

$$e^{-tA}x(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \; c_1, ..., c_n \in \mathbb{C} \tag{4.171}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \cdot e^{tA} \tag{4.172}$$

d.h. $x(t)$ ist eine Linearkombinationen der Spalten von e^{tA}. Die Spalten von e^{tA} sind linear unabhängig, weil e^{tA} invertierbar ist (Lemma 4.2.5). □

5 Bilinearform

Sei V ein Vektorraum über K. Eine Abbildung $f : V \times V \to K$ heisst **bilinear** oder eine Bilinearform von V, wenn f in jedem Argument linear ist, d.h. $\forall x, y, z \in V$ und $\alpha, \beta \in K$:

$$f(\alpha x + By, z) = \alpha f(x, z) + B \cdot f(y, z) \tag{5.1}$$
$$f(z, \alpha x + By) = \alpha f(z, x) + B \cdot f(z, y) \tag{5.2}$$

Man schreibt oft

$$<,>: V \times V \to K \tag{5.3}$$

und

$$< x, y > \tag{5.4}$$

statt $f(x, y)$.

Eine Bilinearform f von V heisst

- **symmetrisch**, wenn $< x, y >=< y, x >$
- **schiefsymmetrisch**, wenn $< x, y >= - < y, x > \forall x, y \in V$

Man brauchte in diesen Fällen nur Linearität in einem Argument.

Beispiel

(i) Das **Skalarprodukt**

$$\cdot : K^n \times K^n \to K \tag{5.5}$$
$$< x, y >= x^t y (= x \cdot y) \tag{5.6}$$

ist bilinear und symmetrisch.

(ii) Für ein beliebiges $A \in Mat(n; K)$ ist

$$f_A : K^n \times K^n \to K \tag{5.7}$$
$$< x, y >= x^t Ay (= f_A(x\, y)) \tag{5.8}$$

bilinear (Aufg.) und symmetrisch gdw A ist symmetrisch ($A = A^t$).
f_A ist symmetrisch

– ⇒ für $1 \le i,j \le n$

$$\alpha_{ij} = e_i^t A e_j =< e_i, e_j >=< e_j, e_i > \quad (5.9)$$
$$= e_j^t A e_i = \alpha_{ji} \quad (5.10)$$
$$\text{d.h. } A = A^t \quad (5.11)$$

– ⇒

$$A = A^t \Leftarrow < x, y > = x^t A y \in Mat(1; K) \quad (5.12)$$
$$= (x^t A y)^t \quad (5.13)$$
$$= y^t A^t (x^t)^t \quad (5.14)$$
$$= y^t A x \quad (5.15)$$
$$=< y, x > \quad (5.16)$$

f_A ist schiefsymmetrisch gdw A ist schiefsymmetrisch ($A^t = -A$) (Aufgabe)

(iii) Für $A, B \in Mat(m, n; K)$ definiert

$$< A, B >= Spur(A^t B) \quad (5.17)$$

eine symmetrische Bilinearform von $Mat(m, n; K)$ (Aufgabe)

(iv) Für konvergente relle Folgen:

$$(a) = (a_n : n \in \mathbb{N}) \quad (5.18)$$
$$(b) = (b_n : n \in \mathbb{N}) \quad (5.19)$$

definiert

$$< (a), (b) >= lim_{n\to\infty}(a_n b_n) \quad (5.20)$$

eine symmetrische Bilinearform von $T_{\text{konvergent}}$

(v) Auf dem Vektorraum $Pol\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome definiert

$$< \phi(x), \chi(x) >= \sum_{i=0}^{\infty} (\phi^{(i)}(0) \cdot \chi^{(i)}(0)) \quad (5.21)$$

mit $\phi^{(i)}$ = i-te Ableitung einer symmetrischen Bilinearform.

Sei $<,>$ eine Bilinearform von einem Vektorraum V über K, und sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V.
Dann heisst $A = (\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij} 0 < v_i, v_j >, 1 \le i,j \le n$ die **Matrix der Bilinearform** bezüglich B.

Beachte, dass für beliebige $x, y \in V$ mit

$$q_B(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, q_B(y) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

gilt:

$$< x, y > =< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j > \tag{5.23}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i u_j < v_i, v_j > \tag{5.24}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i u_j \cdot \alpha_{ij} \tag{5.25}$$

$$= (q_B(x))^t A q_B(y) \tag{5.26}$$

Anmerkung Wenn man V über die Basis B mit K^n identifiziert, erhält man

$$< x, y >= x^t Ay \tag{5.27}$$

Sei nun B' eine andere Basis von V und A' die Matrix der Bilinearform bezüglich B'. Dann gilt für $x, y \in V$:

$$< x, y >= (q_{B'}(x))^t A' q_B(y) \tag{5.28}$$

Aber auch

$$q_{B'} = h_{T^B_{B'}} \circ q_B \tag{5.29}$$

und deshalb für $x, y \in V$

$$(q_B(x))^t A q_B(y) =< x, y > \tag{5.30}$$

$$q_B(x)^t (T^B_{B'})^t A' (T^B_{B'}) q_B(y) =< x, y > \tag{5.31}$$

Daraus folgt:

$$(T^B_{B'})^t A' (T^B_{B'}) = A \tag{5.32}$$

oder für $Q = ((T^B_{B'})^t)^{-1}$

$$A' = QAQ^t \tag{5.33}$$

Da jede invertierbare Matrix $Q \in GL(n; K)$ eine Übergangsmatrix ist, gilt:

Vorlesung vom 20.04.2012

5.1 Definition, Eigenschaften und Beispiele

Satz 5.1.1 *Sei $A \in Mat(n;K)$ die Matrix einer Bilinearform bezüglich einer Basis. Die Matrizen A', die dieselbe Linearform bezüglich anderen Basen beschreiben, sind diejenigen der Formel*

$$A' = QAQ^t \text{ für ein } Q \in GL(n;K) \tag{5.34}$$

Eine Bilinearform von einem Vektorraum V über K ist eine Abbildung $f : V \times V \to K$, die linear in jedem Argument ist.

Beispiel Für $A \in Mat(n;K)$

$$f_A : K^n \times K^n \to K \tag{5.35}$$

$$< x, y >= x^t Ay \tag{5.36}$$

Die Matrix einer Bilinearform von V über K bezüglich einer Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ ist $A = (\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij} =< v_i, v_j >$. Man erhält für

$$x, y \in V :< x, y >= q_B(x)^t Aq_B(y) \tag{5.37}$$

Bemerkungen

- $A \in Mat(n;K)$ ist die Matrix des Skalarprodukts bezüglich einer Basis gdw $A = QQ^t$ für ein $Q \in GL(n;K)$.
  Zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{Q^t} \tag{5.38}$$

  ist die Matrix des Skalarprodukts über $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{5.39}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 & \alpha_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\ \alpha_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 & \alpha_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

Beachte, dass A symmetrisch ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} QQ^t \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} &(5.41)\\
&= (-\alpha+2\beta)^2 + (3\alpha+\beta)^2 &(5.42)\\
&> 0 &(5.43)
\end{aligned}$$

- Die Matrix des Skalarprodukts bezüglich einer orthonormalen Basis ist die Einheitsmatrix

$$A = QQ^t = E \tag{5.44}$$

Frage Wie charakterisiert man die (reellen) Matrizen, die (bezüglich einer geeigneten Basis) das Skalarprodukt repräsentiert? D.h. $A \in Mat(n;K)$ mit $A = P^tP, P \in GL(n;K)$

Eine reelle symmetrische Matrix $A \in Mat(n;\mathbb{Q})$ heisst **positiv definit**, wenn

$$x^tAx > 0 \,\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{5.45}$$

Beispiel Jede Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \tag{5.46}$$

mit $\alpha_{ii} > 0$ für $i = 1...n$ ist positiv definit.
Man beachtet auch: A, B positiv definit $\Rightarrow A + B$ positiv definit.

Lemma 5.1.2 *Für eine symmetrische Matrix $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ und $P \in GL(n;\mathbb{R})$ sind äquivalent:*

(i) A ist positiv definit

(ii) P^tAP ist positiv definit

Beweis

- $(1) \Rightarrow (2)$: Sei $A \in Mat(n;\mathbb{R})$. Für $P \in GL(n;\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(P^tAP)^t &= P^tAP &(5.47)\\
Px \neq 0 \;\; &P \text{ invertierbar} &(5.48)\\
x^t(P^tAP)x &= (Px)^tA(Px) > 0 &(5.49)
\end{aligned}$$

das heisst P^tAP ist symmetrisch und positiv definit.

- $(2) \Rightarrow (1)$: Nach $(1) \Rightarrow (2)$:
P^tAP positiv definit $\Rightarrow (P^{-1})^tP^tAPP^{-1} = A$ positiv definit. □

Satz 5.1.3 *Für $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ sind äquivalent:*

(1) A repräsentiert bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt

(2) $A = P^tP$ für ein $P \in GL(n;\mathbb{R})$

(3) A ist symmetrisch und positiv definit

Sei nun $<,>$ eine symmetrische Bilinearform von einem endlich-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{R}$. Zwei Vektoren $v, w \in V$ sind orthogonal bezüglich $<,>$, wenn

$$< v, w >= 0 \tag{5.50}$$

oft geschrieben $v \perp w$.

Eine Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ von V heisst **Orthonormalbasis** bezüglich $<,>$ wenn für $1 \leq i, j \leq n$:

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.51}$$

Daraus folgt für eine Basis B von V:

$$B \text{ ist eine Orthonormalbasis } \Leftrightarrow \text{ die Matrix von } <,> \text{ bezüglich } B \text{ ist die Einheitsmatrix} \tag{5.52}$$

Frage Wann und wie findet man eine Orthonormalbasis von V?

Satz 5.1.4 *Sei $<,>$ eine positiv definite, symmetrische Bilinearform eines endlich-dimensionalen Vektorrams V über $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis für V bezüglich $<,>$.*

Beispiel Sei $<,>$ das Skalarprodukt $< x, y >= (x, y) = x^ty$ und betrachte den Unterraum von $\mathbb{R}^3$

$$V = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0\} = Span\{v_1, v_2\} \tag{5.53}$$

mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.54}$$

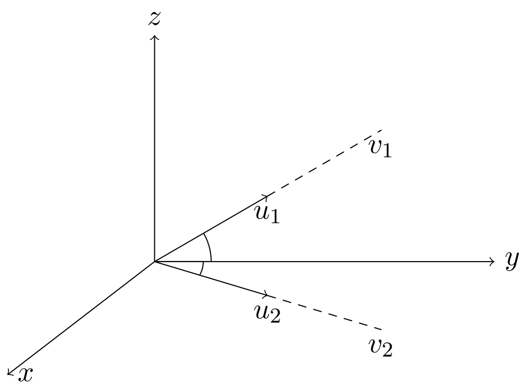
und

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.55}$$

Man setzt zuerst

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (Einheitsvektor)} \tag{5.56}$$

$$|v_1| = \sqrt{< v_1, v_1 >} = \sqrt{5} \tag{5.57}$$



Sei nun

$$v_2' = v_2 - < v_2, u_1 > \cdot u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

und beachte, dass

$$\begin{aligned} < u_1, v_2' > &=< u_1, v_2 - < v_2, u_1 >> && (5.59) \\ &=< u_1, v_2 > - < v_2, u_1 >< u_1, u_1 > && (5.60) \\ &= 0 && (5.61) \end{aligned}$$

Man setzt

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{5}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (Einheitsvektor)} \tag{5.62}$$

Eine Orthonormalbasis ist

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \right) \tag{5.63}$$

Beweis Wir beschreiben das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, mit dem man aus einer beliebigen Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Orthonormalbasis (bezüglich einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform $<,>$) konstruieren kann.

- **Anfang**: Beachte, dass $v_1 \neq 0$ und deshalb $< v_1, v_1 >> 0$ und man kann v_1 durch den Einheitsvektor
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{< v_1, v_1 >}} \tag{5.64}$$
in B ersetzen.

- **Induktiver Schritt:** Nehmen wir an:
  - $w_1, ..., w_{k-1}$ sind orthonormal
  - $(w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ ist eine Basis von V

  Man setzt
$$\alpha_i =< v_k, w_i > i = 1...k-1 \tag{5.65}$$
$$w = v_k - \alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2 - ... - \alpha_{k-1} w_{k-1} \tag{5.66}$$
  und beachte, dass für $i = 1...k-1$
$$\begin{aligned} < w, w_i > &=< v_k, w_i > -\alpha_1 < w_1, w_i > -... - \alpha_{k-1} < w_{k-1}, w_i > && (5.67)\\ &=< v_k, w_i > -\alpha_i < w_i, w_i > && (5.68)\\ &=< v_k, w_i > - < v_k, w_i > && (5.69)\\ &= 0 && (5.70)\end{aligned}$$
  Man ersetzt v_k durch den Einheitsvektor $w_k = \frac{1}{\sqrt{<w,w>}} w$. □

Beweis (Satz 5.1.3)

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) Folgt direkt aus Satz 5.1.1
- (2) $\Leftrightarrow$ (3)
$$\begin{aligned} &A = P^t P, P \in GL(n; \mathbb{R}) && (5.71)\\ &\Rightarrow A^t = (P^t P)^t = P^t P = A && (5.72)\\ &\Rightarrow A = P^t E P \text{ ist positiv definit (Lemma 5.1.2)} && (5.73)\end{aligned}$$
- (3) $\Leftrightarrow$ (2) Sei $A \in Mat(n; \mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Dann existiert nach Satz 5.1.4 eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Bilinearform $< x, y >= x^t A y$.
  Die Matrix $A' \in Mat(n; \mathbb{R})$ von $<,>$ bezüglich B ist die Einheitsmatrix E.
  Aber auch
$$\begin{aligned} &P^t A' P = A \text{ für } P \in GL(n; \mathbb{N}) && (5.74)\\ &\Rightarrow P^t P = A && (5.75)\end{aligned}$$

Frage Aber wie überprüft man, ob eine symmetrische Matrix $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ positiv definit ist?

Sei $A_i \in Mat(i;\mathbb{R})$ für $i = 1...n$ die obere linke $i \times i$ Teilmatrix von

$$A = (\alpha_{ij}), \text{ d.h.} \tag{5.76}$$
$$A_1 = (\alpha_{11}) \tag{5.77}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \tag{5.78}$$
$$\vdots \tag{5.79}$$
$$A_n = A \tag{5.80}$$

$Det(A_i)$ für $i = 1...n$ heissen **Hauptminoren** von A.

Satz 5.1.5 *Für $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ sind äquivalent:*

(1) A ist positiv definit.

(2) Alle Hauptminoren von A sind positiv.

Beispiel $n = 2$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in Mat(2;\mathbb{R}) \tag{5.81}$$

ist positiv definit gdw $\alpha > 0$ und $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$.

5.2 Symmetrische Bilinearform

Wir betrachen nun symmetrische Bilinearformen die nicht immer positiv definit sind.

Beispiel Betrachte die symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 \, (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{5.82}$$

Die Matrizen bezüglich

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{5.83}$$

sind

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ d.h.} \tag{5.84}$$
$$< x, y >= x^t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} y \tag{5.85}$$

$<,>$ ist positiv definit gdw $\alpha > 0, \beta > 0$ und in diesem Fall hat $\mathbb{R}^2$ eine Orthonormalbasis bezüglich $<,>$

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix}\right) \tag{5.86}$$

Vorlesung vom 23.04.2012

5.2 Symmetrische Bilinearformen

Rückblick
Sei $<,>$ eine positiv definite symmetrische Bilinearformen auf einem endlich-dimensionalem Vektorraum V über $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine **Orthonormalbasis** für V (Satz 5.1.4).

Für $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ sind äquivalent:

(i) A repräsentiert (bezüglich einer Basis von $\mathbb{R}^n$) das Skalarprodukt

(ii) $A = P^t P$ für ein $P \in GL(n;\mathbb{R})$

(iii) A ist symmetrisch und positiv definit (Satz 5.1.3)

Wir betrachen nun symmetrische Bilinearformen die nicht immer positiv definit sind.
Beispiel Betrachte die symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$:

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} >= \alpha x, y_1 + \beta x_2 y_2 (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{5.87}$$

Die Matrizen bezüglich

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{5.88}$$

sind

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{5.89}$$

d.h.

$$< x, y >= x^t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} y \tag{5.90}$$

$<,>$ ist **positiv definit** gdw. $\alpha > 0, \beta > 0$ und in diesem Fall hat $\mathbb{R}^2$ eine Orthonormalbasis bezüglich $<,>$

$$(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix}) \tag{5.91}$$

die Matrix von $<,>$ bezüglich dieser Basis ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.92}$$

Wenn $\alpha < 0, \beta < 0$ gilt:

$$< x, x >< 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \tag{5.93}$$

und $<, >$ 'negativ definit'.
Es gibt eine Orthogonalbasis:

$$(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \end{pmatrix}) \tag{5.94}$$

und die entsprechende Matrix ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.95}$$

Ähnlicherweise ist $\alpha > 0, \beta < 0$, dann erhält man eine Orthogonalbasis:

$$(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \end{pmatrix}) \tag{5.96}$$

und die entsprechende Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.97}$$

Sei nun $<, >$ eine symmetrische Bilinearform auf einen endlich dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{R}$. Eine Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ von V ist eine Orthogonalbasis bezüglich $<, >$ wenn für $1 \leq i, j \leq n$ gilt:

$$< v_i, v_j >= 0 \text{ für } i \neq j \tag{5.98}$$

oder man schreibt

$$v_i \perp v_j \tag{5.99}$$

Daraus folgt, dass für eine Basis B von V

B ist eine Orthogonalbasis $\Leftrightarrow$ die Matrix von $<, >$ bezüglich B ist diagonal

Satz 5.2.1 *(a) Sei $<, >$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{R}$. Dann existiert eine Orthogonalbasis $B = (v_1, ..., v_n)$ mit $< v_i, v_i >\in \{-1, 0, 1\}$ für $i = 1...n$*

(b) Sei $A \in Mat(n; \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existiert $Q \in GL(n; \mathbb{R})$, so dass QAQ^t

diagonal ist mit Diagonaleinträgen in $\{-1, 0, 1\}$.

Idee für (a) Man findet $v \in V$ mit

$$< v, v >\neq 0 \tag{5.100}$$

und dann einen Unterraum W von V mit

$$V = Span\{v\} \oplus W \tag{5.101}$$

$$< x, y >= 0 \text{ für alle } x \in Span\{v\}, y \in W \tag{5.102}$$

Die Behauptung folgt durch Induktion nach $dim\, V$.

Sei $<, >$ eine symmetrische Bilinearform von V. Ein $0 \neq v \in V$ heisst **isotrop**, wenn $< v, v >= 0$, andernfalls **anisotrop**

Lemma 5.2.2 *Wenn eine symmetrische Bilinearform $<, >$ von einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ nicht identisch Null ist, gibt es $v \in V$ mit $< v, v >\neq 0$.*

Beweis Wir nehmen an, dass es $v, w \in V$ gibt mit $< v, w >\neq 0$, $< v, v >= 0$, $< w, w >= 0$. Daraus folgt

$$< v + w, v + w > =< v, v > + < w, w > + < v, w > + < w, v > \tag{5.103}$$

$$= 2 < v, w >\neq 0 \tag{5.104}$$

□

Sei $<, >$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Ist W ein Unterraum von V, heisst

$$W^t = \{v \in V :< v, w >= 0 \text{ für alle } w \in W\} \tag{5.105}$$

das **orthogonale Komplement von** W (bezüglich $<, >$), ein Unterraum von V. Insbesondere heisst V^t das **Radikal** von $<, >$, und $<, >$ heisst **nicht-entartet**, wenn, $V^t = \{0\}$.

Lemma 5.2.3 *Sei A die Matrix einer symmetrischen Bilinearform von V bezüglich eine Basis B*

(a) $V^t = \{v \in V | A_{q_B}(v) = 0\}$

(b) $<, >$ ist nicht-entartet gdw. A ist invertierbar

Beweis

(a) Für $v \in V$:

$$A_{q_B}(v) = 0 \Rightarrow q_B(w)^t A_{q_B}(v) = 0 \text{ für alle } w \in V \tag{5.106}$$

$$\Rightarrow < w, v >= 0 \text{ für alle } w \in V \tag{5.107}$$

$$\Rightarrow v \in V^t \tag{5.108}$$

$$A_{q_B}(v) \neq 0 \Rightarrow q_B(w)^t A_{q_B}(v) \neq 0 \text{ für ein } w \in V \text{ mit} \tag{5.109}$$

$$q_B(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.110}$$

$$\Rightarrow v \in V^t \tag{5.111}$$

(b) folgt direkt aus (a)

□

Lemma 5.2.4 *Sei $<,>$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{R}$.*

(a) Ist $w \in V$ anisotrop, d.h. $< w, w > \neq 0$, dann gilt:

$$V = Span\{w\} \oplus (Span\{w\})^\perp \tag{5.112}$$

(b) Ist W ein Untarraum von V und die Einschränkung von $<,>$ auf W nicht-entartet, d.h. $\{w \in W| < w, w' >= 0$ für alle $w' \in W\} = 0$, dann gilt $v = W \oplus W^\perp$

Beweis

(a) Wir brauchen:

$$Span\{w\} \cap (Span\{w\})^\perp = \{0\} \tag{5.113}$$

$$V = Span\{w\} + (Span\{w\})^\perp \tag{5.114}$$

$$v \in Span\{w\} \cap (Span\{w\})^\perp \tag{5.115}$$

$$\Rightarrow v = \alpha w \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R} \tag{5.116}$$

$$< v, w >= 0 \tag{5.117}$$

$$< v, w >= \alpha < w, w > \tag{5.118}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 (< w, w > \neq 0) \tag{5.119}$$

$$v = 0 \tag{5.120}$$

Für $v \in V$ gilt:

$$v = \underbrace{\frac{< v, w >}{< w, w >} w}_{\in Span\{w\}} + \underbrace{(v - \frac{< v, w >}{< w, w >})}_{\in (Span\{w\})^{\perp}} \tag{5.121}$$

$$< \alpha w, v - \frac{< v, w >}{< w, w >} w >= \alpha(< w, v > - \frac{< v, w >}{< w, w >} < w, w >) \tag{5.122}$$

$$= 0 \tag{5.123}$$

(b) folgt aus a durch Induktion nach $dim\, W$

Beweis (Satz 5.2.1)

(a) Induktion nach $dim\, V$

- **Induktionsanfang**
  $dim\, V = 0$, $(,)$ ist eine Orthogonalbasis.
- **Induktionsschritt**
  Wenn $<,>$ identisch Null ist die Matrix bezüglich jeder Basis die (diagonale) Nullmatrix. Andernfalls gibt es nach Lemma 5.2.2 $v_1 \in V$ mit $< v_1, v_1 >\neq 0$, und daraus folgt nach Lemma 5.2.4

  $$V = Span\{v_1\} \oplus (Span\{v_1\})^{\perp} \tag{5.124}$$

  Nach Induktionsannahme existiert eine Orthogonalbasis $(v_2, ..., v_n)$ für $(Span\{v_1\})^{\perp}$. Da auch $< v_1, v_i >= 0$ für $i = 2...n (v_i \in (Span\{v_1\})^{\perp})$ ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Orthogonalbasis von V.

Man ersetzt v_i durch

$$w_i = \frac{v_i}{\sqrt{< v_i, v_i >}} \text{ für } < v_i, v_i >> 0 \tag{5.125}$$

$$w_i = v_i \text{ für } < v_i, v_i >= 0 \tag{5.126}$$

$$w_i = \frac{v_i}{\sqrt{- < v_i, v_i >}} \text{ für } < v_i, v_i >< 0 \tag{5.127}$$

und $(w_1, ..., w_n)$ ist eine Orthogonalbasis für V mit $< w_i, w_i >\in \{-1, 0, 1\}$ für $i = 1...n$.

(b) folgt direkt aus (a) □

Bemerkung Man kann die Orthogonalbasis in Satz 5.2.1 so permutieren, dass die v_i mit $< v_i, v_i >= 1$ zuerst kommen, dann die v_i mit $< v_i, v_i >= -1$ und zuletzt die v_i mit

$< v_i, v_i >= 0$. D.h. die Matrix der Bilinearform $<,>$ bezüglich dieser Basis hat die Form

$$\star \begin{pmatrix} E_p & & 0 \\ & -E_q & \\ 0 & & 0s \end{pmatrix} \tag{5.128}$$

$$p + q + s = n \tag{5.129}$$

E_p, E_q sind $p \times p, q \times q$ Einheitsmatrizen, $0s$ ist die $s \times s$ Nullmatrix.

Satz 5.2.5 *Die Zahlen p, q, s, welche in $\star$ vorkommen, sind durch die Bilinearform $<,>$ festgelegt, d.h. sie hängen nicht von der Wahl der Orthogonalbasis ab. Man nennt das Zahlenpaar die* ***Signatur*** *der Bilinearform.*

Beweis Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Orthogonalbasis von V mit $n = p + q + s$ und

$$< v_i, v_i >= \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq p \\ -1 & p+1 \leq i \leq p+q \\ 0 & p+q+1 \leq i \leq n \end{cases} \tag{5.130}$$

Wir zeigen zuerst, dass

$$V^{\perp} = Span\{v_{p+q+1}, ..., v_{p+q+s}\} \tag{5.131}$$

Daraus folgt, dass $s = dim\, V^{\perp}$ durch $<,>$ eindeutig bestimmt ist.
Beachte, dass

$$w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in V^{\perp} \tag{5.132}$$

$$\text{gdw } < w, v_i >= 0 \text{ für } i = 1...n \tag{5.133}$$

$$\text{gdw } \alpha_i < v_i, v_i >= 0 \text{ für } i = 1...n \tag{5.134}$$

$$\text{gdw } w = \alpha_{p+q+1} v_{p+q+1} + ... + \alpha_n v_n \tag{5.135}$$

d.h.

$$V^{\perp} = Span\{v_{p+q+1}, ..., v_n\} \tag{5.136}$$

Sei nun $(v'_1, ..., v'_n)$ auch eine Orthogonalbasis von V mit

$$n = p' + q' + s' \tag{5.137}$$

und

$$< v_i, v_i >= \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq p' \\ -1 & p'+1 \leq i \leq p'+q' \\ 0 & p'+q'+1 \leq i \leq n \end{cases} \tag{5.138}$$

Es genügt zu zeigen, dass

$$v_1, ..., v_p, v'_{p'+1}, ..., v'_n \tag{5.139}$$

linear unabhängig sind (Aufgabe).
Daraus folgt, dass $p_1 + (n - p') \leq dim\, V = n$, $p \leq p'$.
Ähnlicherweise $p' \leq p$, also $p' = p$ und $q' = q$. $\square$.

Vorlesung vom 30.04.2012

5.2 Symmetrische Bilinearformen

Rückblick und Vorschau
Ist $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ **symmetrisch**, dann gibt es $P \in GL(n;\mathbb{R})$, so dass für geeignete $p, q, s \in \mathbb{N}$ gilt

$$PAP^t = \begin{pmatrix} E_p & & 0 \\ & -E_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ Satz 5.2.1} \tag{5.140}$$

Zudem sind p, q, s durch A eindeutig festgelegt (Satz 5.2.5).

Wir werden später in der Vorlesung sehen, dass es eine **orthogonale** Matrix $P \in O(n;\mathbb{R})$ (d.h. $P^{-1} = P^t$) gibt, so dass PAP^t **diagonal** ist. Daraus folgt, dass p, q, s die Anzahl von je den **positiven**, **negativen** und **nullwertigen Eigenwerten** darstellen (bezüglich algebraischer Vielfachheit). Wenn auch A **positiv definit** ist ($x^tAx > 0$ für $x \neq 0$) gilt $p = n, q = s = 0$.

Wiederholung Satz 5.1.5:
Für $A \in Mat(n; R)$ symmetrisch sind äquivalent:

1. A ist positiv definit
2. Alle Hauptminoren von A sind positiv ($det\, A_i > 0$ für $i = 1...n$, wobei A_i die obere linke $i \times i$ Teilmatrix von A ist)

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2). Sei A positiv definit. Nach Satz 5.1.3 ist $A = P^tP$ für ein $P \in GL(n;\mathbb{R})$. Daraus folgt:

$$det\, A_n = det\, A \tag{5.141}$$
$$= det\, P^tP \tag{5.142}$$
$$= det\, P^t\, det\, P \tag{5.143}$$
$$= (det\, P)^2 \tag{5.144}$$
$$> 0 \tag{5.145}$$

  Ähnlicherweise da A_i auch positiv definit ist, gilt $det\, A_i > 0$.

- (2) $\Rightarrow$ (1) Induktion nach n.
  - Induktionsanfang n=1

$$A = (\alpha) \tag{5.146}$$
$$det\, A = \alpha > 0 \tag{5.147}$$
$$\Rightarrow x^tAx = \alpha x^tx > 0\, (x \neq 0) \tag{5.148}$$

- **Induktionsschritt** Nach Induktionsannahme ist A_{n-1} positiv definit (Zu zeigen: A_n ist positiv definit). Nach Satz 5.1.3 gibt es $Q' \in GL(n-1;\mathbb{R})$ mit

$$Q' A_{n-1} Q'^t = E_{n-1} \tag{5.149}$$

Dann gilt:

$$QAQ^t = \left(\begin{array}{c|c} E_{n-1} & * \\ \hline * & \end{array}\right) \tag{5.150}$$

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} Q' & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \tag{5.151}$$

$$\tag{5.152}$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$A' = \underbrace{PAP^t}_{\text{symmetrisch}} = \left(\begin{array}{c|c} E_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right) \text{ mit } P = L_1, ..., L_k Q \in GL(n;\mathbb{R}) \tag{5.153}$$

(weil A' symmetrisch ist).

Daraus folgt, dass

$$det\, A > 0 \Rightarrow det\, A' = det\, P\, det\, A\, det\, P^t \tag{5.154}$$

$$= (det\, P)^2\, det\, A \tag{5.155}$$

$$> 0 \Rightarrow \alpha > 0 \tag{5.156}$$

und A' ist positiv definit. Nach Lemma 5.1.2 ist A auch positiv definit. □

5.3 Euklidische Räume

Ein endlich-dimensionaler Vektorraum V über $\mathbb{R}$ zusammen mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform $<,>$ heisst **euklidischer Vektorraum**. Man beachet, dass für $v \in V$

$$v = 0 \text{ gdw } < v, v >= 0 \tag{5.157}$$

und definiert

$$|v| = \sqrt{< v, v >} \tag{5.158}$$

die **Länge** von v und auch

$$d(x, y) = |x - y|,\ x, y \in v \tag{5.159}$$

der **Abstand** von x nach y.

Ziel Wir möchten den **Winkel** zwischen $v \neq 0$ und $\neq 0 \in V$ messen.
Methode Für v, w **linear abhängig** ist der Winkel 0. Andernfalls betrachtet man den **Unterraum**

$$W = Span\{v, w\}(dim\, W = 2) \tag{5.160}$$

Die Einschränkung der Bilinearform auf W ist auch positiv definit. Also hat W eine Orthonormalbasis

$$B = (w_1, w_2) \tag{5.161}$$

Beachte, dass für $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$(x \cdot y) = |x|\,|y|\,cos\,\theta \tag{5.162}$$

wobei θ der Winkel zwischen x und y ist.
Insbesondere

$$(q_B(v) \cdot q_B(w)) = |q_B(v)|\,|q_B(w)|\,cos\,\theta \tag{5.163}$$
$$\tag{5.164}$$

und man erhält

$$< v, w >= |v|\,|w|\,cos\,\theta \tag{5.165}$$
$$cos\,\theta = \frac{< v, w >}{|v|\,|w|} \tag{5.166}$$

Man definiert den Winkel θ zwischen v und w als Winkel zwischen $q_B(v)$ und $q_B(w)$ - bis auf das Vorzeichen $\pm$ — eindeutig festgelegt.

Man erhält die **Schwarzsche Ungleichung**

$$| < v, w > | \leq |v||w| \tag{5.167}$$

und die **Dreiecksungleichung**

$$|v + w| \leq |v| + |w| \tag{5.168}$$

(Aufgabe)

Beachte nun, dass für einen Unterraum W die Einschränkung von $<,>$ auf W **nicht-entartet** ist, und deshalb gilt nach Lemma 5.2.4

$$V = W \oplus W^{\perp} \tag{5.169}$$
$$(W^{\perp} = \{v \in V :< v, w >= 0 \text{ für alle } w \in W\}) \tag{5.170}$$

Also hat jedes $v \in V$ eine **eindeutige** Darstellung der Form

$$v = w + w' \text{ mit } w \in W, < w, w' >= 0 \tag{5.171}$$

Man definiert

$$\Pi : V \to Q, v \mapsto w \tag{5.172}$$

die orthogonale Projektion von V auf W.

Sei nun $(w_1, ..., w_k)$ eine Orthonormalbasis von W. Dann gilt für jedes $v \in V$:

$$\Pi(v) =< v, w_1 > w_1 + ...+ < v, w_k > w_k \tag{5.173}$$

(die geometrische Bedeutung des Gram-Schmidt-Verfahrens).
Es genügt zu zeigen, dass

$$v = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{(v - w)}_{\in W^\perp} \text{ mit } w =< v, w_1 > w_1 + ...+ < v, w_k > w_k \tag{5.174}$$

Für $i = 1...k$:

$$\begin{aligned} < v - w, w_i > &=< v, w_i > - < w, w_i > && (5.175)\\ &=< v, w_i > - < v, w_i >< w_i, w_i > && (5.176)\\ &= 0 && (5.177) \end{aligned}$$

Also $v - w \in W^\perp$.

Insbesondere erhält man für eine Orthonormalbasis $B = (v_1, ..., v_n)$ von V und $v \in V$

$$v =< v, v_1 > v_1 + ...+ < v, v_n > v_n, q_B(v) = \begin{pmatrix} < v, v_1 > \\ \vdots \\ < v, v_n > \end{pmatrix} \tag{5.178}$$

Beispiel Betrachte den Unterraum von $\mathbb{R}^3$

$$W = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0\} \tag{5.179}$$

Man findet eine Orthonormalbasis (siehe vorheriges Beispiel) bezüglich des Skalarprodukts:

$$B = (u_1, u_2) \text{ mit } u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \tag{5.180}$$

Für

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{5.181}$$

berechnet man:

$$\begin{aligned}
\Pi(v) &= < v, u_1 > u_1 + < v, u_2 > u_2 && (5.182)\\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} u_2 && (5.183)\\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} u_1 - \frac{4}{\sqrt{10}} u_2 && (5.184)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{-4}{7} \\ \frac{-2}{7} \end{pmatrix} \in W && (5.185)\\
v - \Pi(v) &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{-4}{7} \\ \frac{-2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{-10}{7} \\ \frac{30}{7} \end{pmatrix} \in W^{\perp} && (5.186)
\end{aligned}$$

5.4 Hermitesche Formen

Ziel: Wie suchen nun ähnliche Begriffe - wie Symmetrie, Länge, Positivität, Orthogonalität usw. - und Charakterisierungen für Vektorräume über $\mathbb{C}$.
Zuerst wie definiert man die **Länge** eines Vektors?

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ mit } x_j = \alpha_j + \beta_j \cdot i, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, j = 1...n \tag{5.187}$$

Man verwendet oft

$$\begin{aligned}
|x| &= \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + ... + \alpha_n^2 + \beta_n^2} && (5.188)\\
&= \sqrt{\overline{x_1} x_1 + ... + \overline{x_n} x_n} && (5.189)\\
\text{wobei } \overline{\alpha + \beta i} &= \alpha - \beta i && (5.190)
\end{aligned}$$

Man braucht deshalb statt dem übelichen Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
< x, y > &= x^{-1} y && (5.191)\\
&= \overline{x}_1 y_1 + ... + \overline{x}_n y_n && (5.192)
\end{aligned}$$

Beachte, dass für diese Definition für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$< x, x > \in \mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha > 0\} \text{ (Positivität)} \tag{5.193}$$

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $<,>: V \times V \to \mathbb{C}, (v,w) \mapsto < v,w >$ heisst **hermitesche Form** auf V, wenn für alle $x,y,z \in V, \alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$< \alpha x, y > = \overline{\alpha} < x, y > \tag{5.194}$$
$$< x + y, z > = < x, z > + < y, z > \tag{5.195}$$
$$< x, y > = \overline{< y, x >} \tag{5.196}$$

Daraus folgt auch

$$< x, \alpha y > = \overline{< \alpha y, x >} \tag{5.197}$$
$$= \overline{\overline{\alpha} < y, x >} \tag{5.198}$$
$$= \alpha \overline{< y, x >} \tag{5.199}$$
$$= \alpha < x, y > \tag{5.200}$$
$$< x, y + z > = \overline{< y + z, x >} \tag{5.201}$$
$$= \overline{< y, x >} + \overline{< z, x >} \tag{5.202}$$
$$= < x, y > + < x, z > \tag{5.203}$$

Vorlesung vom 04.05.2012

Hermitesche Formen

Beispiele

(i) Das hermitesche Standardprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist

$$< x, y >= \overline{x^t}y = \overline{x_1}y_1 + ... + \overline{x_n}y_n \in \mathbb{R} \tag{5.204}$$

$$(< x, y > \in \mathbb{R}^+ \text{ für } x \neq 0) \tag{5.205}$$

(ii) Sei $C[a, b]$ die Menge aller komplexwertigen stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dann ist $< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ eine hermitesche Form auf $C[a, b]$.

(iii) Sei V der Vektorraum aller Folgen $(x_i), i \in \mathbb{N}$ von komplexen Zahlen, so dass $\lim\limits_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^n |x_i|^2)$ existiert. Dann ist

$$< (x_i), (y_i) > (i \in \mathbb{N}) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\overline{y_i} \tag{5.206}$$

eine hermitesche Form auf V.

Sei nun V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Analog zur Matrix einer Bilinearform definiert man die Matrix einer hermiteschen Form auf V bezüglich einer Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ von V:

$$A = (\alpha_{ij}) \text{ mit } \alpha_{ij} =< v_i, v_j >, 1 \leq i, j \leq n \tag{5.207}$$

Daraus folgt, dass $\forall v, w \in V$:

$$< v, w >= (\overline{q_B(v)^t})Aq_B(w) \tag{5.208}$$

Man erhält für $1 < i, j \leq n$

$$\alpha_{ij} =< v_i, v_j >= \overline{< v_j, v_i >} = \overline{\alpha_{ji}} \tag{5.209}$$

Sei nun $A \in Mat(n; \mathbb{C})$. Man definiert

$$A^* = \overline{A}^t \text{ für } A = (\alpha_{ij}), \overline{A} = \overline{\alpha_{ij}} \tag{5.210}$$

als die Adjungierte von A (im Gegensatz zu einer vorherigen Definition.)

A heisst **hermitesch**, wenn $A = A^*$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 5 & i & 1+2i \\ -i & -1 & 3 \\ 1-2i & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.211}$$

ist hermitesch.

Bemerkungen

- Die Diagonaleinträge einer hermiteschen Matrix $A = (\alpha_{ij})$ sind reell

$$\alpha_{ii} = \overline{\alpha_{ii}} \Rightarrow \alpha_{ii} \in \mathbb{R} \tag{5.212}$$

- Wenn A die Matrix einer hermiteschen Form $<,>$ bezüglich einer Basis B ist, gilt

$$< v, w >= q_B(v)^* A q_B(w) \tag{5.213}$$

  und $A = A^*$ ist hermitesch

- Für $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ gilt

$$A^* = \overline{A^t} = A^t \text{ d.h.} \tag{5.214}$$
$$A \text{ ist hermitesch} \Leftrightarrow A \text{ ist symmetrisch} \tag{5.215}$$

- Für $A, B \in Mat(n, \mathbb{C})$ gilt

$$(A+B)^* = A^* + B^* \tag{5.216}$$
$$(AB)^* = B^* A^* \tag{5.217}$$
$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \tag{5.218}$$
$$A^{**} = A \text{ (Beweis Aufgabe)} \tag{5.219}$$

Satz 5.4.1 *Sei A die Matrix einer hermiteschen Form $<,>$ auf einem Vektorraum bezüglich einer Basis B. Die Matrizen A', die $<,>$ bezüglich anderen Basen B' beschreiben, sind diejenigen von der Form*

$$A' = QAQ^* \tag{5.220}$$

für ein $Q \in GL(n;\mathbb{C})$

Beweis Für $x, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned} < x, y > &= (q_B(x))^* A(q_B(y)) \qquad (5.221)\\ &= (q_{B'}(x))^* A'(q_{B'}(y)) \qquad (5.222) \end{aligned}$$

Aber auch

$$q_{B'} = h_{T^B_{B'}} \circ q_B \tag{5.223}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} & (q_B(x))^* A(q_B(y)) \qquad (5.224)\\ &= (q_B(x))^* (T^B_{B'}) A' (T^B_{B'}) q_B(y) \qquad (5.225) \end{aligned}$$

Daraus folgt: Man wählt $x = v_i, y = v_j$ für $B = (v_1, ..., v_n)$

$$A = (T^B_{B'}) A' (T^B_{B'}) \tag{5.226}$$

oder für

$$\begin{aligned} Q &= ((T^B_{B'})^*)^{-1} = ((T^B_{B'})^{-1})^* \qquad (5.227)\\ A' &= QAQ^* \qquad (5.228) \end{aligned}$$

□

Bemerkungen

1. $A \in Mat(n; \mathbb{C})$ ist die Matrix des hermiteschen Standardskalarprodukts bezüglich einer Basis gdw. $A = QQ^*$ für ein $Q \in GL(n; \mathbb{C})$.
   Zum Beispiel

   $$A = \begin{pmatrix} 6 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 1-i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{5.229}$$

   ist die Matrix des hermiteschen Standardskalarprodukts bezüglich der Basis

   $$B = \left(\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix} \right) \tag{5.230}$$

   Beachte, dass A hermitesch ist ($A = A^*$) und $x^* A x \in R^+$ für $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$

2. Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V und sei $<,>$ eine hermitesche Form auf V mit

   $$< v_i, v_j > = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.231}$$

   Dann ist die Matrix von $<,>$ bezüglich B die Einheitsmatrix und $< v_i, v_j > = q_B(v_i)^* q_B(v_j)$, d.h. $P^* P = E$ mit $P = (q_B(v_1) ... q_B(v_n))$

Eine Matrix $P = Mat(n; \mathbb{C})$ heisst unitär, wenn $P^* P = E$, d.h. $P^* = P^{-1}$.

Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{pmatrix} \tag{5.232}$$

ist unitär.

Bemerkungen

(1) $P = Mat(n;\mathbb{R})$ ist unitär gdw $P^*P = P^tP = E$ gdw. P orthogonal ist.

(2) Die unitären $n \times n$ Matrizen bilden die sogenannte **unitäre Gruppe**:

$$V(n;\mathbb{C}) = \{P \in GL(n;\mathbb{C}) : P^*P = E\} \tag{5.233}$$

Man definiert auch (wie für reelle Matrizen):

- Eine hermitesche Form $<,>$ auf V ist positiv definit, wenn

$$< v, v > \in \mathbb{R}^+ \,\forall 0 \neq v \in V \tag{5.234}$$

  $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ ist positiv definit, wenn $x^*Ax \in \mathbb{R}^+\, \forall x \in \mathbb{C}^n$

- Eine Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ heisst Orthonormalbasis bezüglich einer hermiteschen Form $<,>$, wenn

$$< v_i, v_j > = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.235}$$

Satz 5.4.2 *Sei $<,>$ eine hermitesche Form auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{C}$. Es gibt eine Orthonormalbasis für V gdw $<,>$ ist positiv definit.*

Beweis (Aufgabe)

Satz 5.4.3 *Sei $<,>$ eine hermitesche Form auf einen endlich-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{C}$ und sei W ein Unterraum von V. Wenn die Einschränkung von $<,>$ auf W nicht entartet ist, d.h. $\{w \in W| < w, w' > = 0 \forall w' \in W'\} = \{0\}$ gilt $v = W \oplus W^\perp$ ($W^\perp = \{v \in V| < v, w > = 0 \forall w \in W\}$)*

Beweis (Aufgabe)

Vorschau Für $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ hermitesch, sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A zueinander orthogonal, dann existiert eine unitäre Matrix U, so dass $U^*AU(= U^{-1}AU)$ eine **reelle Diagonalmatrix**.

Beispiele

(i) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \in Mat(2;\mathbb{C}) \tag{5.236}$$

ist hermitesch.

$$det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & i-1 \\ -1-i & t \end{vmatrix} = t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) \tag{5.237}$$

Eigenwerte: $2, -1 \in \mathbb{R}$

Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ -1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = (1-i)x_2 \tag{5.238}$$

$$Eig(A;2) = Span\{\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{5.239}$$

Eigenwert -1:

$$\begin{pmatrix} -2 & i-1 \\ -1-i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 = (i-1)x_2 \tag{5.240}$$

$$Eig(A;-1) = Span\{\begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix}\} \tag{5.241}$$

Beachte, dass

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.242}$$

Dann gilt

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.243}$$

mit

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{5.244}$$

unitär.

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(3;\mathbb{R}) \tag{5.245}$$

ist hermitesch, d.h. symmetrisch.

$$det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t - 2 = (t+1)^2(t-2) \tag{5.246}$$

Eigenwerte: $-1, 2$

Eigenwert -1:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \tag{5.247}$$

$$Eig(A; -1) = Span\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \tag{5.248}$$

Beachte, dass

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.249}$$

Mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren erhält man:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.250}$$

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.251}$$

$$u_2 = \frac{w}{|w|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{5.252}$$

$$Eig(A, -1) = Span\{u_1, u_2\} \tag{5.253}$$

Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 \tag{5.254}$$

$$Eig(A; 2) = Span\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \} \tag{5.255}$$

Man erhält:

$$U^*AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.256}$$

mit

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{5.257}$$

unitär, d.h. orthogonal.

Vorlesung vom 07.05.2012

5.5 Der Spektralsatz

Definition Ein hermitescher Raum ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V $(dim\, V < \infty)$ mit einer positiv definiten hermiteschen From $<,>$

Bemerkung Nach Wahl einer Orthogonalbasis wird V isomorph zu $\mathbb{C}^n$ mit hermiteschen Standardprodukt.
Wir wollen nur Basiswechsel zulassen, welche die herm. Form invariant lassen, d.h. dir durch unitäre $(PP^* = E)$ Übergangsmatrizen gegeben sind. Wir wollen den Endomorphismus $f : V \to V$ studieren.
Sei B eine Orthogonalbasis von V, M sei die Matrix von f bezüglich B.

$$\text{Basiswechsel} \rightsquigarrow M' = PMP^{-1} \tag{5.258}$$
$$\underbrace{=}_{P^{-1}=P^*} PMP^* \tag{5.259}$$

Satz 5.5.1 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. M sei die Matrix von f bezüglich der Orthogonalbasis B von F.*

(a)

$$M \text{ hermitesch} \Leftrightarrow f \text{ hermitesch, d.h.} \tag{5.260}$$
$$\forall v, w \in V :< f(v), w >=< v, f(w) > \tag{5.261}$$

(b)

$$M \text{ unitär} \Leftrightarrow f \text{ unitär, d.h.} \tag{5.262}$$
$$\forall v, w \in V :< v, w >=< f(v), f(w) > \tag{5.263}$$

Beweis x, y-Koordinatenvektoren von v, w, also

$$v = BX, w = BY, < v, w >= X^*Y, f(v) = BMX, f(w) = BMY \tag{5.264}$$

(a)

$$< f(v), w >= (MX)^*Y = X^*M^*Y, < v, f(w) >= X^*MY \tag{5.265}$$
$$M \text{ hermitesch } (M^* = M) \Rightarrow f \text{ hermitesch} \tag{5.266}$$
$$f \text{ hermitesch } \Rightarrow \forall e_i, e_j \in B : \underbrace{e_i^* M^* e_j}_{<e_i, M^* e_j>} = e_j^* M e_j \tag{5.267}$$
$$< e_i, M^* e_j >= (M)_{ij}^* \Rightarrow M \text{ hermitesch} \tag{5.268}$$

(b)

$$< v,w >= X^*Y, < f(v), f(w) >= (MX)^*MY = X^*M^*MY \tag{5.269}$$
$$\text{Analog zu (a): } f \text{ hermitesch} \Leftrightarrow M^*M = E, \text{ also } M \text{ unitär.} \tag{5.270}$$

□

Satz 5.5.2 *Sei $f : V \to V$ ein hermitescher Endomorphismus.*

(a) Die Eigenwerte von f sind reell.

(b) Die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

Beweis $v, w \in V$ sind Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_v, λ_w

(a)

$$< f(v), v >=< \lambda_v v, v >= \overline{\lambda_v} < v, v > \tag{5.271}$$
$$f \text{ hermitesch } \to || \tag{5.272}$$
$$< v, f(v) >=< v, \lambda_v v >= \lambda_v < v, v > \tag{5.273}$$
$$\Rightarrow (\lambda_v - \overline{\lambda_v}) \underbrace{< v, v >}_{\neq 0} = 0 \tag{5.274}$$
$$\Rightarrow \lambda_v = \overline{\lambda_v} \in \mathbb{R} \tag{5.275}$$

(b) Sei $\lambda_v \neq \lambda_w$

$$< f(v), w >=< \lambda_v v, w >= \lambda_v < v, w > \tag{5.276}$$
$$f \text{ hermitesch } \to || \tag{5.277}$$
$$< v, f(w) >=< v, \lambda_w w >= \lambda_w < v, w > \tag{5.278}$$
$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_v - \lambda_w)}_{\neq 0} < v, w >= 0 \tag{5.279}$$
$$\Rightarrow < v, w >= 0, \text{ also } v \perp w \tag{5.280}$$

□

Satz 5.5.3 *Spektralsatz für hermitesche Matrizen*

(a) Sei $f : V \to V$ ein hermitescher Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthogonalbasis von V aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten.

(b) Sei M eine hermitesche Matrix. Dann gibt es eine unitäre Matrix P so dass PMP^* = diagonal mit reellen Einträgen.

Beweis (a) und (b) sind äquivalent: M ist Matrix von f bezüglich einer Orthogonalbasis, P ist Übergangsmatrix bei Basiswechsel zu B' aus Eigenvektoren, PMP^* Matrix von f bezüglich B' (diagonal mit Eigenwerten auf Diagonale).
Beweis der Aussage: Induktion über $dim\, V = n$

- n=1 $f(v) = aV(a \in \mathbb{R})\forall v \in V$. Sei V auf Länge 1 normiert, $< v, v >= 1$

$$\rightsquigarrow \{v\} \tag{5.281}$$

  Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f zu reellem Eigenwert $a \in \mathbb{R}$

- $n-1 \rightarrow n$ Wähle $v \in V$ von f, auf Länge 1 normiert, $< v, v >= 1$. Ergänze zu Orthogonalbasis B (Gram-Schmidt), M sei Matrix von f bezüglich B.

$$M = \left|\begin{array}{c|ccc} a & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{M} & \\ 0 & & & \end{array}\right| \tag{5.282}$$

$$f(v) = av \tag{5.283}$$

$$M = M^* \Rightarrow a \in \mathbb{R} \tag{5.284}$$

$$* \cdots * = 0 \cdots 0 \tag{5.285}$$

$$\tilde{M}^* = \tilde{M} \tag{5.286}$$

Beweis: Da (a) & (b) äquivalent, folgt aus der Induktionshypothese, dass

$$\exists \tilde{p} \in U(n-1, \mathbb{C}) \tag{5.287}$$

so dass

$$\tilde{P}\tilde{M}\tilde{P}^* = D \tag{5.288}$$

diagonal mit reellen Einträgen.

$$P := \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right| \Rightarrow PMP^* = \left|\begin{array}{c|ccc} a & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{D} & \\ 0 & & & \end{array}\right| \tag{5.289}$$

diagonal mit reellen Einträgen. □

Bemerkung Wir wissen, dass die Übergangsmatrix gegeben ist durch

$$P = [B']^{-1} = [B']^{*} \text{ (da } P \text{ unitär)} \tag{5.290}$$

wobei B' neue Basis. Hier: B' Orthonormalbasis aus Eigenvektor von f. Orthonormalbasis heisst: Basisvektoren sind auf Länge 1 normiert, und Basisvektoren müssen orthogonal sein zueinander. Achtung: Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander (Satz 5.5.2). Bei mehrfachen Eigenwerten muss man zugehörige Eigenvektoren orthogonal wählen (Gram-Schmidt).

Beispiel

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \tag{5.291}$$

hermitesch. Finde P unitär so dass PMP^{*} = diagonal.
Eigenwerte:

$$det \begin{pmatrix} 2-\lambda & i \\ -i & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \tag{5.292}$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 1 \tag{5.293}$$

$$\Leftrightarrow 2-\lambda = \pm 1 \tag{5.294}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \tag{5.295}$$

Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1 : \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{normierter Eigenvektor } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{5.296}$$

$$\lambda_2 = 3 : \begin{vmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{normierter Eigenvektor } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{5.297}$$

$$\Rightarrow P = [B']^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix}^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} \tag{5.298}$$

Kontrolle:

$$PMP^{*} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}^{*} \tag{5.299}$$

Durch Einschränkung auf reelle Vektorräume kann man Ergebniss für hermitesche Matrizen auf relle symmetrische Matrizen übertragen

$$M \text{ reelle symmetrische Matrix} \tag{5.300}$$

$$M = M^t \Rightarrow M^{*} = M \text{ (also } M \text{ hermitesch)} \tag{5.301}$$

Sei V ein euklidischer Raum (= $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform $<,>$). Wir betrachten den Endomorphismus $f : V \to V$.

Satz 5.5.4 *Sei M die Matrix von f bezüglich einer Orthogonalbasis.*

(a) M symmetrisch $\Leftrightarrow$ f symmetrisch, d.h.

$$\forall v, w \in V :< f(v), w >=< v, f(w) > \tag{5.302}$$

(b) M orthogonal $\Leftrightarrow$ f orthogonal, d.h.

$$\forall v, w \in V :< v, w >=< f(v), f(w) > \tag{5.303}$$

Satz 5.5.5 *Sei M eine reelle symmetrische Matrix.*

(a) Die Eigenwerte von M sind reell.

(b) Die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

Satz 5.5.6 *Spektralsatz (reeller Fall)*

(a) Sei $f : V \to V$ ein symmetrischer Endomorphismus eines euklidischen Raums V. Dann gibt es eine Orthogonalbasis von V aus Eigenvektoren von f zu rellen Eigenwerten.

(b) Sei M eine relle symmetrische Matrix. Dann gibt es P orthogonal so dass

$$PMP^t = \text{ diagonal mit rellen Einträgen} \tag{5.304}$$

Vorlesung vom 14.05.2012

5.5 Der Spektralsatz

Rückblick: Für jede **hermitesche** Matrix $A \in Mat(n; \mathbb{C})$ (d.h. $A = A^* = A^t$) gibt es eine **unitäre** Matrix $P \in Mat(n; \mathbb{C})$ (d.h. $P^*P = E$), so dass P^*AP ($P^{-1}AP$) **diagonal** ist. Es gibt insbesondere für jede **symmetrische** Matrix $A \in Mat(n; \mathbb{R})$ eine **orthogonale** Matrix $P \in Mat(n; \mathbb{R})$, so dass P^tAP diagonal ist.

Bemerkung Sei $A \in Mat(2; \mathbb{C})$ hermitesch, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha, \delta \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \tag{5.305}$$

Dann hat

$$p_A(t) = t^2 - (\alpha + \delta)t + (\alpha\delta - \beta\overline{\beta}) \tag{5.306}$$

eine **doppelte** Nullstelle gdw

$$(\alpha{+}\delta) - 4(\alpha\delta - \beta\overline{\beta}) \tag{5.307}$$
$$= (\alpha + \delta)^2 + 4(\beta\overline{\beta}) \tag{5.308}$$
$$= 0 \tag{5.309}$$

Aber $(\alpha - \delta)^2 \geq 0$ und $\beta\overline{\beta} \geq 0$. Also hat $p_A(t)$ eine doppelte Nullstelle gdw $\alpha = \delta$ und $\beta = 0$, d.h.

$$A = \alpha E \, (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{5.310}$$

Beispiel Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(3; \mathbb{R}) \tag{5.311}$$

Dann ist A **symmetrisch** und

$$det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-5 & -4 & -2 \\ -4 & t-5 & -2 \\ -2 & -2 & t-2 \end{vmatrix} \tag{5.312}$$
$$= (t-1)^2(t-10) \tag{5.313}$$

Eigenwerte $1(2\times), 10$

- **Eigenwert 1**:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 - 4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = -2x_1 - 2x_2 \tag{5.314}$$

$$Eig(A;1) = Span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \} \tag{5.315}$$

Beachte, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.316}$$

Mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren erhält man

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{5.317}$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} u_1 \tag{5.318}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{5.319}$$

$$u_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \left(\frac{w}{|w|} \right) \tag{5.320}$$

- **Eigenwert 10**:

$$Eig(A;10) = Span\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \} \tag{5.321}$$

Beachte, dass

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.322}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.323}$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer **hermiteschen** Matrix sind immer **orthogonal**.

Man erhält

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \tag{5.324}$$

$$\text{mit } P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 \\ -2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \tag{5.325}$$

5.6 Kegelschnitte und Quadriken

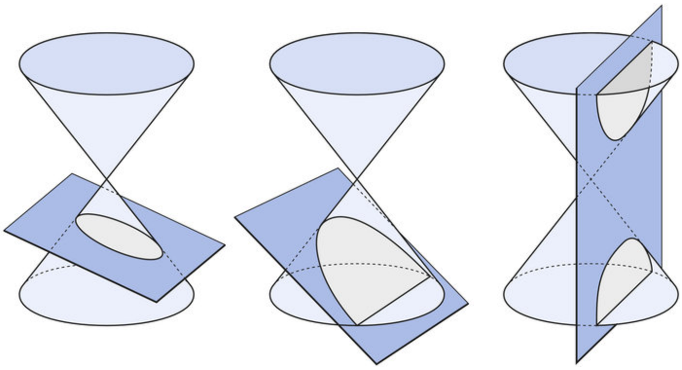


Abbildung 5.1: Diverse Kegelschnitte (Grafik: www.duden.de)

Ziel: Wir möchten sogenannte "Kegelschnitte" über $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe unserer Resultate für Bilinearformen **beschreiben**.

Beispiel Man beschreibt die "quadratische Form"

$$q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 \tag{5.326}$$

durch eine **symmetrische Matrix**

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \tag{5.327}$$

d.h.

$$q(x_1, x_2) = x^t A x \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \tag{5.328}$$

Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$q(x_1, x_2) = 4 \tag{5.329}$$

ist ein Kegelschnitt, nämlich eine Ellipse.

Frage: Wie erkennt man die **Form**[1] eines Kegelschnitts?

[1] Ellipse, Hyperbel, Parabel

Ein **Kegelschnitt** ist die Lösungsmenge über $\mathbb{R}^2$ einer quadratischen Gleichung der Form:

$$\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma = 0 \tag{5.330}$$

Der Anteil dieses Kegelschnitts

$$q(x_1, x_2) = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 \tag{5.331}$$

quadratische Form.
Man schreibt in Matrixnotation

$$x^t Ax + Bx + \gamma = 0 \tag{5.332}$$

$$\text{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \tag{5.333}$$

Zur Erinnerung (Satz 3.2.3)
Jede **euklidische Bewegung** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (eine “abstandstreue” Abbildung) ist die Zusammensetzung eines orthogonalen Endomorphismus und einer Translation, d.h.

$$f(x) = Ax + b \tag{5.334}$$

für ein $A \in O(n; \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$

Wir zeigen, dass **entweder**

$$\boxed{x^t Ax + Bx + \gamma = 0} \tag{5.335}$$

einen **entarteten** Kegelschnitt beschreibt, d.h. ein Paar von Geraden, eine Gerade, ein Punkt, oder die leere Menge, **oder** es eine **euklidische Bewegung**

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{5.336}$$

gibt, so dass

$$f(x)^t Af(x) + Bf(x) + \gamma = 0 \tag{5.337}$$

eine der folgenden Typen hat:

(i) **Ellipse**

$$\lambda y_1^2 + \mu y_2^2 - 1 = 0 \, (\lambda, \mu > 0) \tag{5.338}$$

(ii) **Hyperbel**

$$\lambda y_1^2 - \mu y_2^2 - 1 = 0 \, (\lambda, \mu > 0) \tag{5.339}$$

(iii) **Parabel**

$$\lambda y_1^2 - y_2 = 0 \, (\lambda > 0) \tag{5.340}$$

Man braucht zuerst eine **orthogonale** Koordinatentransformation (Drehung, Spiegelung usw.) und eine **Translation**.

Beispiel Betrachte

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4 = 0 \tag{5.341}$$
$$x^tAx - 4 = 0 \tag{5.342}$$
$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \tag{5.343}$$

Man erhält

$$p_A(t) = (t-6)(t-4) \tag{5.344}$$
$$Eig(A;6) = Span\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} \tag{5.345}$$
$$Eig(A;4) = Span\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{5.346}$$

Also

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{5.347}$$

mit

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.348}$$

Man setzt

$$y = P^tx\,(P^t \text{ orthogonal}) \tag{5.349}$$

und erhält

$$x = Py \tag{5.350}$$
$$(Py)^tA(Py) - 4 = 0 \tag{5.351}$$
$$y^t(P^tAP)y - 4 = 0 \tag{5.352}$$

das heisst

$$6y_1^2 + 4y_2^2 - 4 = 0 \tag{5.353}$$
$$\text{oder } \frac{3}{2}y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0 \tag{5.354}$$
$$\Rightarrow \text{Ellipse} \tag{5.355}$$

Betrachte nun

$$x^tAx + Bx - 4 = 0 \tag{5.356}$$
$$\text{mit } B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{5.357}$$

Man erhält

$$y^t(P^tAP)y + BPy - 4 = 0 \tag{5.358}$$

das heisst

$$6y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_1 - 4 = 0 \tag{5.359}$$

Man setzt

$$z = y + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.360}$$

und erhält

$$\begin{aligned} 6(z_1 + \frac{1}{6}) + 4z_2^2 - 2(z_1 + \frac{1}{6}) - 4 && (5.361)\\ = 6z_1^2 14z_2^2 - \frac{25}{6} = 0 && (5.362)\\ \text{d.h. } \frac{36}{25}z_1^2 + \frac{24}{25}z_2^2 - 1 = 0 && (5.363)\\ \Rightarrow \text{Ellipse} && (5.364) \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die allgemeine Gleichung

$$\begin{aligned} x^tAx + Bx + \gamma = 0 && (5.365)\\ \text{mit } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1, \beta_2 \end{pmatrix} && (5.366) \end{aligned}$$

Nach dem **Spektralsatz** (5.5.6) gibt es eine **orthogonale** Matrix $P \in Mat(2;\mathbb{R})$. sp dass P^tAP diagonal ist. Man setzt

$$y = P^tx \tag{5.367}$$

und erhält

$$\begin{aligned} (Py)^tA(Py) + B(Py) + \gamma = 0 && (5.368)\\ y^t(\underbrace{P^tAP}_{Diag.-Mat.})y + (BP)y + \gamma = 0 && (5.369) \end{aligned}$$

Also nehmen wir jetzt an, dass A **diagonal** ist, d.h.

$$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \gamma = 0 \tag{5.370}$$

Wenn $\alpha_{11} \neq 0, \alpha_{22} \neq 0$, setzt man für $i = 1, 2$:

$$z_i = x_i + \frac{\beta_i}{2\alpha_{ii}} \tag{5.371}$$

und erhält für ein $\gamma' \in \mathbb{R}$

$$\alpha_{11}z_1^2 + \alpha_{22}z_2^2 - \gamma' = 0 \tag{5.372}$$

Ist $\gamma' = 0$, so definiert die Gleichung ein Paar von Geraden oder einen Punkt, d.h. der Kegelschnitt ist **entartet**.
Ist $\gamma' \neq 0$,, erhält man

$$\frac{\alpha_{11}z_1^2}{\gamma'} + \frac{\alpha_{22}z_2^2}{\gamma'} - 1 = 0 \tag{5.373}$$

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = 0 \tag{5.374}$$

Wenn $\frac{\alpha_{11}}{\gamma'}, \frac{\alpha_{22}}{\gamma'} < 0$, dann ist der Kegelschnitt **leer** und entartet. Für $\frac{\alpha_{11}}{\gamma'}, \frac{\alpha_{22}}{\gamma'} > 0$ erhält man eine **Ellipse**, andernfalls eine **Hyperbel**.
Falls $\alpha_{22} = 0, \beta_2 \neq 0, \alpha_{11} \neq 0$ definiert man

$$z_1 = x_1 + \frac{\beta_1}{2\alpha_{11}} \tag{5.375}$$

$$z_2 = x_2 + \frac{\gamma + \frac{\beta_1^2}{4\alpha_{11}^2}}{\beta_2} \tag{5.376}$$

und erhält

$$\alpha_{11}z_1^2 + \beta_2 z_2 = 0 \tag{5.377}$$

und dann

$$-\frac{\alpha_{11}}{\beta_2}z_1^2 - z_2 = 0 \tag{5.378}$$

Schliesslich kann man, falls $\frac{-\alpha_{11}}{\beta_1} < 0$ durch eine Spiegelung das Vorzeichen ändern. Man erhält eine **Parabel**.

Der Fall $\alpha_{11} = 0, \beta_1 \neq 0, \alpha_{22} \neq 0$ ist sehr ähnlich. Die übrigen Fälle definieren entartete Kegelschnitte (Aufgabe).

Vorlesung vom 18.05.2012

Beispiele

(i) Betrachte

$$x^t Ax - 6 = 0 \tag{5.379}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.380}$$

d.h.

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 6 = 0 \tag{5.381}$$

Man erhält:

$$p_A(t) = \begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & t-3 \end{pmatrix} \tag{5.382}$$

$$= (t-1)(t-3) - 4 \tag{5.383}$$

$$= t^2 - 4t - 1 \tag{5.384}$$

$$= (t - (2+\sqrt{5}))(t - (2-\sqrt{5})) \tag{5.385}$$

$$Eig(A, 2+\sqrt{5}) : \tag{5.386}$$

$$= Span \left\{ \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{5.387}$$

$$Eig(A, 2-\sqrt{5}) : \tag{5.388}$$

$$= Span \left\{ \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\} \tag{5.389}$$

Also

$$P^t AP = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{5.390}$$

mit

$$P = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{5.391}$$

Man erhält für $y = P^t x$:

$$(2+\sqrt{5})y_1^2 + (2-\sqrt{5})y_2^2 - 6 = 0 \tag{5.392}$$

$$\frac{2+\sqrt{5}}{6}y_1^2 + \frac{2-\sqrt{5}}{6}y_2^2 - 1 = 0 \tag{5.393}$$

$$\tag{5.394}$$

den Kegelschnitt einer **Hyperbel**.

(ii) Betrachte

$$x^t A x - 4 = 0 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \tag{5.395}$$

Man erhält (siehe oben)

$$P^t A P = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ mit } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.396}$$

Man setzt $y = P^t x$ und erhält:

$$-6y_1^2 - 4y_2^2 - 4 = 0 \tag{5.397}$$

$$6y_1^2 + 4y_2^2 + 4 = 0 \tag{5.398}$$

entartet.

Betrachte nun

$$x^t A x + Bx - 4 = 0 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 & -12 \end{pmatrix} \tag{5.399}$$

Man erhält für $<= P^t x$

$$-6y_1^2 + 4y_2^2 + 12\sqrt{2}y_1 - 4 = 0 \tag{5.400}$$

und dann für

$$z_1 = y_1 + \frac{12\sqrt{2}}{-6 \cdot 2} = y_1 - \sqrt{2} \tag{5.401}$$

$$z_2 = y_2 \tag{5.402}$$

$$-6(z_1 + \sqrt{2})^2 + 4z_2^2 + 12\sqrt{2}(z_1 + \sqrt{2}) - 4 = 0 \tag{5.403}$$

$$-6z_1^2 - 4z_2^2 + 8 = 0 \tag{5.404}$$

d.h. eine **Ellipse**.

$$\frac{3z_1^2}{2} + \frac{1}{2}z_2^2 - 1 = 0 \tag{5.405}$$

Eine **Quadrik** ist die Lösungsmenge über $\mathbb{R}^n$ einer quadratischen Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n}^{n} 2\alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x^i + y = 0 \tag{5.406}$$

oder in Matrixform:

$$x^t A x + Bx + \gamma = 0 \tag{5.407}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \tag{5.408}$$

Nach einer geeigneten orthogonalen Transfomration P wird die Quadrik durch eine Gleichung

$$y^t (P^t A P) y + BPy + Y = 0 \tag{5.409}$$

beschrieben, wobei $P^t A P$ **diagonal** ist.
Durch Translationen eliminiert man die Terme $\beta_i x_i$. In $\mathbb{R}^3$ ist eine Quadrik entweder **entartet** oder es gibt eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass

$$f(x)^t A f(x) + Bf(x) + \gamma = 0 \tag{5.410}$$

eine der folgenden Typen hat:

(i) **Ellipsoide**: $\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{33} x_3^2 - 1 = 0$

(ii) **Einschalige Hyperboloide**: $\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 - \alpha_{33} x_3^2 - 1 = 0$

(iii) **Zweischalige Hyperboloide**: $\alpha_{11} x_1^2 - \alpha_{22} x_2^2 - \alpha_{33} x_3^2 - 1 = 0$

(iv) **Elliptische Paraboloide**: $\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 - x_3 - 1 = 0$

(v) **Hyperbolische Paraboloide**: $\alpha_{11} x_1^2 - \alpha_{22} x_2^2 - x_3 - 1 = 0$

wobei $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33} > 0$ sind.

Beispiel

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_1 - 2x_3 - 1 = 0 \tag{5.411}$$

$$x^t A x + Bx - 1 = 0 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{5.412}$$

Dann (siehe oben)

$$P^t AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ mit } P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 \\ -2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \tag{5.413}$$

Man erhält für $y = P^t x$

$$y_1^2 y_2^2 + y_3^2 + \sqrt{5} y_1 - 1 = 0 \tag{5.414}$$

und dann gilt für

$$z_1 = y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2} . z_2 = y_2, z_3 = y_3 \tag{5.415}$$

$$z_1^2 + z_2^2 + 10 z_3^2 - \frac{9}{4} = 0 \tag{5.416}$$

oder

$$\frac{4}{9} z_1^2 + \frac{4}{9} z_2^2 + \frac{40}{9} z_3^2 - 1 = 0 \tag{5.417}$$

$\rightarrow$ **Ellipsoid**.

Bemerkung Man kann oft den Typ einer Quadrik ohne komplizierte Berechnungen bestimmen.
Beispiel: Für einen **nicht entarteten** Kegelschnitt, beschrieben durch

$$x^t Ax + Bx + \gamma = 0 \tag{5.418}$$

erhält man

- eine **Ellipse** gdw. $det\, A > 0$
- eine **Hyperbel** gdw. $det\, A < 0$
- eine **Parabel** gdw. $det\, A = 0$

Zudem kann mit Koordinatenwechsel evtl. nicht orthogonal bestimmt werden, ob ein Kegelschnitt entartet ist.

5.7 Der Spektralsatz für normale Endomorphismen

Zur Erinnerung: Für jede hermitesche Matrix $A \in Mat(n; \mathbb{C})$, $(A = A^*)$ gibt es eine unitäre Matrix P, so dass $P^* AP$ diagonal ist.

Frage: Welche (anderen) Matrizen haben diese Eigenschaft?
Eine Matrix $A \in Mat(n; \mathbb{C})$ heisst **normal**, wenn A und A^* vertauschbar sind, d.h. $A^* A = AA^*$.

Bemerkung Jede **hermitesche** Matrix $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ ist normal.

$$AA^* = A^2 = A^*A \tag{5.419}$$

auch jede **schiefsymmetrische Matrix** ($A^* = -A$)

$$AA^* = -A^2 = A^*A \tag{5.420}$$

und jede **unitäre Matrix**

$$AA^* = E = A^*A \tag{5.421}$$

Es gibt auch andere Beispiele, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.422}$$

Lemma 5.7.1 *Sei $P \in Mat(n;\mathbb{C})$ unitär. Dann ist $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ normal gdw. P^*AP^* normal ist*

Beweis

"$\Rightarrow$" $A \leftarrow Mat(n;\mathbb{C})$ unitär.

$$\Rightarrow AA^* = A^*A \tag{5.423}$$
$$\Rightarrow (P^*AP)(P^*AP)^* \tag{5.424}$$
$$= (P^*AP)(P^*A^*P) \tag{5.425}$$
$$= P^*AA^*P \tag{5.426}$$
$$= P^*A^*P = (P^*AP)^*(P^*AP) \tag{5.427}$$

"$\Leftarrow$" P^*AP normal.

$$\Rightarrow P^{**}P^*AP^*P^* \text{ ist normal (nach "}\Rightarrow\text{")} \tag{5.428}$$
$$\Rightarrow A \text{ ist normal} \tag{5.429}$$

□

Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines **hermiteschen Raumes** V (endlich-dimensional über $\mathbb{C}$ mit einer positiv definiten hermiteschen Form) heisst **normal**, wenn die zugehörige Matrix bezüglich einer (und damit jeder) Orthonormalbasis normal ist.

Satz 5.7.2 *$A \in Mat(n;\mathbb{C})$ ist normal gdw. es ein unitäre Matrix $P \in Mat(n;\mathbb{C})$ gibt, so dass P^*AP diagonal ist.*

Beweis

"⇒" Jede **Diagonalmatrix** ist normal. Also ist P^*AP^* diagonal, dann ist A nach Lemma 5.7.1 auch normal.

"⇐" Sei $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ **normal**. Man wählt einen Eigenvektor $v = v$, und normiert ihn auf Länge 1, so dass $< v, v >= 1$ gilt.
Dann ergänzt man (v_1) zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$. Man erhält ein unitäres $P \in Mat(n;\mathbb{C})$ und $B \in Mat(n-1;\mathbb{C})$, so dass

$$P^*AP = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \text{ und} \tag{5.430}$$

$$(P^*AP)^* = \left(\begin{array}{c|ccc} \overline{\alpha_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{\alpha_{12}} & & & \\ \vdots & & B^* & \\ \overline{\alpha_{1n}} & & & \end{array}\right) \tag{5.431}$$

□

P^*AP ist **normal** (Lemma 5.7.1) und deshalb sind die oberen linken Einträge von $(P^*AP)(P^*AP)^*$ und $(P^*AP)^*(P^*AP)$ **gleich** das heisst

$$\alpha_{11}\overline{\alpha_{11}} = \alpha_{11}\overline{\alpha_{11}} + \alpha_{12}\overline{\alpha_{12}} + ... + \alpha_{1n}\overline{\alpha_{1n}} \tag{5.432}$$

Daraus folgt

$$\alpha_{12}\overline{\alpha_{12}} + ... + \alpha_{1n}\overline{\alpha_{1n}} = 0 \tag{5.433}$$

und (da $\alpha_{1i}\overline{\alpha_{1i}} \in \mathbb{R}$ und ≥ 0)

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = ... = \alpha_{1n} = 0 \tag{5.434}$$

d.h.

$$P^*AP = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{5.435}$$

B ist auch normal und die Behauptung folgt durch Induktion nach n. □

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.436}$$

ist normal.

$$\begin{align} det(tE - A) &= \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} \tag{5.437} \\ &= (t-3)^2 + 4 \tag{5.438} \\ &= (t-(3+2i))(t-(3-2i)) \tag{5.439} \end{align}$$

Eigenwerte: $3+2i, 3-2i$.

$$Eig(A; 3+2i) = Span\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\} \tag{5.440}$$

$$Eig(A; 3-2i) = Span\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\} \tag{5.441}$$

$$P^*AP = \begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix} \text{ mit } P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \textbf{ unitär} \tag{5.442}$$

Korollar 5.7.3 *Jede konjugierte Klasse in der unitären Gruppe enthält eine Diagonalmatrix, dass heisst für eine unitäre Matrix $P \in Mat(n; \mathbb{C})$ existiert Q unitär, so dass Q^*PQ* ***unitär*** *und* ***diagonal*** *ist.*

Beispiel

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \text{ ist unitär} \tag{5.443}$$

Man erhält

$$Q^*PQ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \tag{5.444}$$

unitär mit

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.445}$$

Vorlesung vom 21.05.2012

5.8 Andere Darstellungen

Alternierende und schiefsymmetrische Bilinearformen
Eine Bilinearform $<,>$ auf einem Vektorraum über V heisst **alternierend**, wenn $\forall v \in V$ gilt:

$$< v, v >= 0 \tag{5.446}$$

Daraus folgt, dass $\forall v, w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 =< v + w, v + w > &=< v, v > + < v, w > + < w, v > + < w, w > && (5.447)\\ &=< v, w > + < w, v > && (5.448)\end{aligned}$$

und deshalb

$$< v, w >= - < w, v > \tag{5.449}$$

d.h. $<,>$ ist schiefsymmetrisch.

Ist $1 + 1 \neq 0$ in Km dann gilt auch die andere Richtung:

$$\begin{aligned} <,> \text{ ist schiefsymmetrisch } &\Rightarrow \forall v \in V :< v, v >= - < v, v > && (5.450)\\ &\Rightarrow (1 + 1) < v, v >= 0 && (5.451)\\ &\Rightarrow < v, v >= 0 && (5.452)\end{aligned}$$

d.h. $<,>$ ist alternierend.

Eine Matrix

$$A = (\alpha_{ij}) \in Mat(n; K) \tag{5.453}$$

von einer alternierenden Bilinearform $<,>$ bezüglich einer Basis auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V über K hat die Eigenschaft

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -\alpha_{ji} & \text{wenn } i \neq j \\ 0 & \text{wenn } i = j \end{cases} \tag{5.454}$$

und deshalb auch

$$A^t = -A \tag{5.455}$$

d.h. A ist schiefsymmetrisch.

Wenn $1 + 1 \neq 0$ und $A^t = -A$, dann hat A auch diese Eigenschaft, aber für $1 + 1 \neq 0$ gilt diese Richtung nicht. Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.456}$$

Jede reelle schiefsymmetrische Matrix $A \in Mat(n;\mathbb{R})$ ist **normal**, also

$$AA^* = AA^t = -A^2 = A^tA = A^*A \tag{5.457}$$

und deshalb nach dem Spektralsatz unitär diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(2;\mathbb{R}) \tag{5.458}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ mit } P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.459}$$

Beachte nun, dass wenn $A \in Mat(n;\mathbb{C})$ schiefsymetrisch ist und $1 + 1 \neq 0 \in K$, gilt:

$$A \text{ invertierbar } \Rightarrow n \text{ gerade} \tag{5.460}$$

$$(det\, A \neq 0) \tag{5.461}$$

$$n \text{ ungerade } \Rightarrow det\, A = det(-A^t) \tag{5.462}$$

$$= det(-A) \tag{5.463}$$

$$= (-1)^n det\, A \tag{5.464}$$

$$= -det\, A \tag{5.465}$$

$$\Rightarrow (1+1)\, det\, A = 0 \tag{5.466}$$

$$\Rightarrow det\, A = 0 \tag{5.467}$$

Beachte auch, dass

$$A \text{ invertierbar und schiefsymmetrisch} \Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} \tag{5.468}$$

$$= -A^{-1} \text{ (d.h. } A^{-1} \text{ schiefsymmetrisch)} \tag{5.469}$$

Satz 5.8.1 *(a) Sei V ein Vektorraum der Dimension n über K, und sei $<,>$ eine nicht-entartete alternierende Bilinearform auf V. Dann ist n eine gerade Zahl, und es gibt eine Basis von V bezüglich der die Matrix von $<,>$ die folgende Form hat:*

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} 0m & Em \\ -Em & 0m \end{pmatrix} \text{ mit } m = \frac{n}{2} \tag{5.470}$$

(b) Sei $A \in Mat(n; \mathbb{C})$ invertierbar und alternierend. Dann ist n gerade und es gibt ein invertierbares Produkt $P \in Mat(n; K)$ so dass $P^t AP = J_{2m}$ mit $m = \frac{n}{2}$.

Beweis Man zeigt:

- $<,>$ ist nicht-entartet gdw. eine zugehörige Matrix bezüglich einer Basis invertierbar ist.
- $V = W \oplus W^{\perp}$, wenn $<,>$ auf einem Unterraum W von V nicht-entartet ist.
- Wenn $<,>$ nicht identisch Null ist, dann gibt es einen Unterraum W, so dass $<,>$ auf W bezüglich einer geeigneten Basis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.471}$$

  beschrieben ist.

Bemerkung Ein Vektorraum mit einer nicht-entarteten alternierenden Bilinearform heisst fsymplektrischer Raum.

Index